Autour de la factorisation des polynômes

Martin Weimann

Le 14 juin 2024

LMNO, Université de Caen Normandie

1. Factorisation bivariée et singularités
2. Factorisation univariée sur les corps locaux
3. Factorisation bivariée et géométrie torique

Facile

$$\left(-2y + x^2 - x + 3\right)(3xy - y + 2x + 1)$$

$$=$$

$$-6xy^2 + 2y^2 + 3x^3y - 4x^2y + 6xy - 5y + 2x^3 - x^2 + 5x + 3$$

Moins facile

$$-6xy^2 + 2y^2 + 3x^3y - 4x^2y + 6xy - 5y + 2x^3 - x^2 + 5x + 3$$

$$=$$

$$\left(-2y + x^2 - x + 3\right)(3xy - y + 2x + 1)$$

Le cas dense

- $f \in k[x,y]$ de degré total d (k un corps effectif)
- $O(d^\omega) =$ coût de la multiplication dans $\mathcal{M}_d(k)$ $(2 \leq \omega \leq 3)$
- $\tilde{O}(d) = O(d^{1+o(1)})$

Théorème (Lecerf, 2006)

Factorisation déterministe dans $k[x,y]$ en $\tilde{O}(d^{\omega+1})$ plus le coût d'une facto univariée de degré d.

Lifting et recombinaisons :

- Réduction au cas $f(0,y)$ séparable degré d (changement de coordonnées)
- Factorisation de $f(0,y)$ (factorisation univariée)
- Factorisation de $f \mod (x^{2d})$ (lemme de Hensel)
- Recombinaisons des facteurs modulaires (algèbre linéaire)

Objectif

Tenir compte d'indicateurs de complexité plus fins que le degré total.

1. Factorisation bivariée et singularités

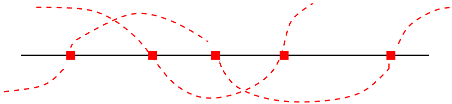
Problème des recombinaisons

Suppose $k = \bar{k}$ pour simplifier.

$$\begin{cases} f(x,y) = F_1(x,y) \cdots F_s(x,y) \\ f(0,y) = (y-\alpha_1)\cdots(y-\alpha_d) \quad \text{supposé séparable.} \end{cases}$$

Recombinaisons: Cherche $\mu_i = (\mu_{ij}) \in \{0,1\}^d$ tels que

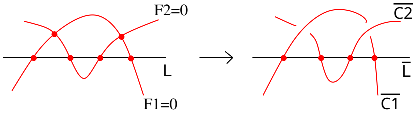
$$F_i(0,y) = \prod_{j=1}^{d} (y-\alpha_j)^{\mu_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, s.$$



$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \mu_1 = (1,0,1,0,1) \\ \mu_2 = (0,1,0,1,0) \end{cases}$$

Normalisation

- Facteurs de $f(x,y) \leftrightsquigarrow$ composantes $C_1, \ldots, C_s$ de la courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ de f.
- Facteurs de $f(0,y) \leftrightsquigarrow$ composantes de $Z = C \cap L$, où L droite de $\mathbb{P}^2$.
- $\pi : \overline{C} \to C$ normalisation
- $\overline{Z} = \pi^{-1} Z \simeq Z$.



$$
\begin{aligned}
H^0(\mathcal{O}_{\overline{C}}) &\simeq H^0(\mathcal{O}_{\overline{C}_1}) \oplus \cdots \oplus H^0(\mathcal{O}_{\overline{C}_s}) &\simeq k^s \\
H^0(\mathcal{O}_{\overline{Z}}) &\simeq H^0(\mathcal{O}_{\{p_1\}}) \oplus \cdots \oplus H^0(\mathcal{O}_{\{p_d\}}) &\simeq k^d
\end{aligned}
$$

Lemme

$(\mu_1, \ldots, \mu_s)$ *est la base échelonnée réduite de l'image du morphisme de restriction*

$$H^0(\mathcal{O}_{\overline{C}}) \xrightarrow{r} H^0(\mathcal{O}_{\overline{Z}})$$

Faisceau dualisant et résidus

Proposition (W. 2013)

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\overline{C}}) \xrightarrow{r} H^0(\mathcal{O}_{\overline{Z}}) \xrightarrow{R} H^0(\Omega_{\overline{C}}(\overline{Z}))^\vee \longrightarrow H^0(\Omega_{\overline{C}})^\vee \longrightarrow 0$$

où $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) : \omega \mapsto \sum_{i=1}^n \mathrm{res}_{p_i}(\lambda_i \omega)$.

Preuve

Dualité de Serre, formule d'adjonction, théorème des résidus.

Corollaire

Etant donnée une k*-base de* $H^0(\Omega_{\overline{C}}(\overline{Z})) \,/\, H^0(\Omega_{\overline{C}})$*, on factorise* f *sur* k *en* $O(d^\omega)$.

Exemple: $f(x,y) = y^5 - xy^3 - xy^2 - 3y^3 + 2xy + x^2 - 2y$

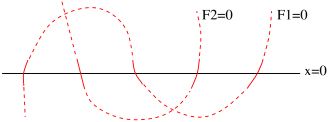
- $f(0,y) = (y-2)(y-1)y(y+1)(y+2)$.
- On calcule $H^0(\Omega_{\overline{C}}(\overline{Z})) \,/\, H^0(\Omega_{\overline{C}}) \simeq \langle y, y^2-1, y^3\rangle_k$. Donc $s = 2$.

On obtient

$$R = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad ker(R) = \langle (1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0)\rangle.$$

D'où $f = F_1 F_2$ avec :

- $F_1(0,y) = (y-2)y(y+2)$
- $F_2(0,y) = (y-1)(y+1)$.



Y a plus qu'à...

$$f(0,y) = F_1(0,y) \times F_2(0,y) \overset{\text{Hensel}}{\Longrightarrow} f(x,y) = (y^3 - 4y - x)(y^2 - 1 - x).$$

Clôture intégrale et conducteur

- $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ la courbe affine de f, supposée réduite.
- $k[\mathcal{C}] = k[x,y]/(f)$ l'anneau de fonctions et $k(\mathcal{C})$ l'anneau des fractions.
- $\overline{k[\mathcal{C}]}$ la **clôture intégrale** de $k[\mathcal{C}]$ dans $k(\mathcal{C})$. (normalisation affine)

Lemme

*Supposons f séparable, unitaire de degré d en y. Le **conducteur***

$$\mathcal{I} := \{g \in k[\mathcal{C}],\ g\,\overline{k[\mathcal{C}]} \subset k[\mathcal{C}]\}$$

est un $k[x]$-module libre de rang d (idéal de $\overline{k[\mathcal{C}]}$).

Conducteur et factorisation

Définition

*On dit qu'une $k[x]$-base $(g_1, \ldots, g_d)$ de $\mathcal{I}$ est **réduite** (pour le degré total) si*

$$\deg(\sum \lambda_i g_i) = \max \deg(\lambda_i g_i) \qquad \forall\ \lambda_i \in k[x].$$

Proposition (W. 2024, d'après Böhm et al. 2015 + Bauch 2015)

Considérons $L = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$ (recombinaisons à l'infini) et supposons $\mathrm{Sing}(C) \subset \mathbb{A}^2$.

Soit $(g_1, \ldots, g_d)$ une base réduite de $\mathcal{I}$. Alors

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad H^0(\Omega_{\overline{C}}(n\overline{Z})) = \left\langle\, g_i\, x^j,\ \deg(g_i x^j) \leq d - 3 + n \,\right\rangle_k.$$

Corollaire

Calcul d'une $k[x]$-base réduite du conducteur $\overset{O(d^\omega)}{\Longrightarrow}$ ***Factorisation de f.***

Calcul de la clôture intégrale

- Delta-invariant :

$$\Delta(C) = p_a(C) - g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g(C), \qquad \Delta(C) = 0 \iff C \text{ lisse.}$$

- Coût du calcul du radical de $\mathrm{Disc}_y(f)$:
  - $\mathrm{D}(d) \subset \tilde{\mathcal{O}}(d^3)$ (algorithme déterministe)
  - $\mathrm{D}(d) \subset \tilde{\mathcal{O}}(d^2)$ si $k = \mathbb{F}_q$ (algo probabiliste, Villard 2023)

Théorème (Poteaux-W. 2024)

Supposons $\mathrm{Car}(k) = 0$ *ou* $\mathrm{Car}(k) > d$. *On calcule en*

$$\mathrm{D}(d) + \tilde{\mathcal{O}}(d\Delta) \subset \tilde{\mathcal{O}}(d^3)$$

une $k[x]$*-base triangulaire de la clôture intégrale* $\overline{k[\mathcal{C}]}$ *(normalisation affine).*

Preuve : stratégie locale-globale

Notations : $A = k[x]$ et $B = \overline{k[\mathcal{C}]}$.

- Pour chaque $p \mid \mathrm{Disc}_y(f)$:
  - Factorisation rapide de $f \in \hat{A}_p[y]$ à précision p-adique optimale

    (Montes 2000 + Poteaux-W. 2022)
  - Déduit une A_p-base triangulaire de $B \otimes A_p$

    (Okutsu 1983, Guardia-Nart-Montes 2006, Stainsby 2016)
- Recollement des A_p-bases en une A-base triangulaire de B.

  (restes chinois, Okutsu 1983).

Base réduite du conducteur

Travail en cours (Darkaoui-Simon-W., en s'appuyant sur Neiger-Xuan 2017)

*Calcul d'une $k[x]$-base **réduite** du conducteur en $\tilde{O}(\Delta\, d^{\omega-1})$.*

Corollaire (Conjecturé en 2010)

Supposons $\mathrm{Car}(k) = 0$ ou $> d$ et supposons $\mathrm{Sing}(C) \subset \mathbb{A}^2$. Factorisation déterministe en

$$\mathrm{D}(d) + \tilde{O}(\Delta\, d^{\omega-1}) \subset \tilde{O}(d^{\omega+1}).$$

$\rightsquigarrow$ ***Améliore les algos actuels, d'autant plus que C est peu singulière.***

Exemple : Complexité $\tilde{O}(d^{\omega})$ pour une courbe nodale sur $\mathbb{F}_q$ avec $O(d)$ noeuds.

Ouvertures

Objectif (Darkaoui-Simon-W.)

1. *Courbes nodales en $\tilde{O}(d^3)$.*
2. *Le cas des courbes singulières à l'infini.*
3. *Espaces $\mathcal{L}(D)$ de Riemann-Roch en $\tilde{O}(d^{\omega-1}(\Delta + \deg(D)))$.*

   (améliore Abelard-Berardini-Couvreur-Lecerf 2022).

Objectif (Poteaux-W.)

Il faut ajouter $O(\Delta^2) \subset O(d^4)$ en petite caractéristique résiduelle. Très agaçant...

Problème : *factorisation sur les corps locaux plus coûteuse.*

2. Factorisation univariée sur les corps locaux

Résultat principal

- (A, v) un **anneau de valuation discrète complet** de corps résiduel k.
- Exemples : $A = k[[t]]$ ou $A = \mathbb{Z}_p$ (et $k = \mathbb{F}_p$).
- Complexité $=$ nombre d'opérations dans k.

Théorème (Poteaux-W. 2022, variante rapide de Montes 2000)

Soit $f \in A[x]$ séparable de degré d et $\delta = v(\mathrm{Disc}(f))$.

1. *Facteurs irréductibles de f à précision v-adique $n \geq \delta$:*
   - $\tilde{\mathcal{O}}(dn)$ *si* $\mathrm{Car}(k) = 0$ *ou* $\mathrm{Car}(k) > d$
   - $\tilde{\mathcal{O}}(dn + \delta^2)$ *sinon.*
2. *Test d'irréductibilité de f :*
   - $\tilde{\mathcal{O}}(\delta)$ *si* $\mathrm{Car}(k) \nmid d$
   - $\tilde{\mathcal{O}}(\delta^2)$ *sinon.*

En deux mots

- Algorithme Round 4 de Zassenhauss (1986) : problèmes de gestion de précision.
- On se base plutôt sur l'**algorithme OM** de Montes (2000).
- S'inspire des travaux de Ore (1928), MacLane (1936) et Okutsu (1983) :

  $\rightsquigarrow$ polygones ϕ-adiques, opérateurs résiduels.

- Reformalisé par Nart et al. (2020) et Spivakovski et al. (2022) dans le contexte plus général des **corps henséliens** :

  $\rightsquigarrow$ valuations augmentées, algèbres graduées, polynômes clés (MacLane-Vaquié, 2007).

L'algorithme OM (sans frais)

Suppose f unitaire. Calculs menés avec précision v-adique δ.

Algorithme $\big($Montes + Hensel μ-adique$\big)$

***Factorisation**(f,μ):* — *μ la valuation de Gauss*

- *Si $R_\mu(f)$ irréductible, retourne f.* — *f irréductible*
- $R_\mu(f) = P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r} \in k_\mu[z]$ — *Factorisation résiduelle*
- $f = F_1 \cdots F_r$ — *Lemme de Hensel μ-adique*
- *Pour $i = 1, \ldots, r$:*
  - *Calcule $\phi_i \in A[x]$ tel que $R_\mu(\phi_i) = P_i$* — *Polynôme clé*
  - *Calcule les pentes λ_{ij} de $\mathcal{N}^+_{\mu,\phi_i}(F_i)$* — *Polygone ϕ_i-adique*
  - *Actualise $\mu_{ij} = [\mu, \phi_i, \lambda_{ij}]$* — *Valuation augmentée*
- *Retourne $\bigcup_{i,j}$ **Factorisation**(F_i, μ_{ij}).*

Exemple (Kuo)

$$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$$

Réductible ou irréductible ?

L'orateur sonde l'audience...

$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x].$

$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$.

- **Au troisième appel** : polynôme clé $\phi = x^2 - t^3$ et valuation augmentée

$$\mu(t) = 1, \quad \mu(x) = 3/2, \quad \mu(\phi) = 7/2$$

avec corps résiduel $k_\mu = \mathbb{Q}$.

$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x].$

- **Au troisième appel** : polynôme clé $\phi = x^2 - t^3$ et valuation augmentée

$$\mu(t) = 1, \quad \mu(x) = 3/2, \quad \mu(\phi) = 7/2$$

  avec corps résiduel $k_\mu = \mathbb{Q}$.

- On a $f = \phi^2 - t^7$, avec $\mu(\phi^2) = \mu(t^7) = 7$.

$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$.

- **Au troisième appel** : polynôme clé $\phi = x^2 - t^3$ et valuation augmentée

$$\mu(t) = 1, \quad \mu(x) = 3/2, \quad \mu(\phi) = 7/2$$

avec corps résiduel $k_\mu = \mathbb{Q}$.

- On a $f = \phi^2 - t^7$, avec $\mu(\phi^2) = \mu(t^7) = 7$.
- On déduit :

$$R_\mu(f) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1) \quad \overset{\text{Montes}}{\Longrightarrow} \quad f = F_1 F_2 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$$

$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$.

- **Au troisième appel** : polynôme clé $\phi = x^2 - t^3$ et valuation augmentée

$$\mu(t) = 1, \quad \mu(x) = 3/2, \quad \mu(\phi) = 7/2$$

avec corps résiduel $k_\mu = \mathbb{Q}$.

- On a $f = \phi^2 - t^7$, avec $\mu(\phi^2) = \mu(t^7) = 7$.
- On déduit :

$$R_\mu(f) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1) \quad \overset{\text{Montes}}{\Longrightarrow} \quad f = F_1 F_2 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$$

- Hensel μ-adique :

$$F_1 = \underbrace{x^2 - t^3 - t^2 x}_{\mu=7/2} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\mu>7/2} \qquad F_2 = \underbrace{x^2 - t^3 + t^2 x}_{\mu=7/2} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\mu>7/2}.$$

$f = (x^2 - t^3)^2 - t^7 \in \mathbb{Q}[[t]][x].$

- **Au troisième appel** : polynôme clé $\phi = x^2 - t^3$ et valuation augmentée

$$\mu(t) = 1, \quad \mu(x) = 3/2, \quad \mu(\phi) = 7/2$$

avec corps résiduel $k_\mu = \mathbb{Q}$.

- On a $f = \phi^2 - t^7$, avec $\mu(\phi^2) = \mu(t^7) = 7$.

- On déduit :

$$R_\mu(f) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1) \quad \overset{\text{Montes}}{\Longrightarrow} \quad f = F_1 F_2 \in \mathbb{Q}[[t]][x]$$

- Hensel μ-adique :

$$F_1 = \underbrace{x^2 - t^3 - t^2\, x}_{\mu=7/2} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\mu>7/2} \qquad F_2 = \underbrace{x^2 - t^3 + t^2\, x}_{\mu=7/2} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\mu>7/2}.$$

- Indices de ramification $e_1 = e_2 = 2$ et degrés résiduels $f_1 = f_2 = 1$.

Contributions (variante rapide, 2022)

1. Lemme de Hensel μ-adique.
2. Diviser pour régner : précision $2\delta/d \rightsquigarrow$ moitié des facteurs
3. Racines approchées (Abhyankhar-Moh) $\Rightarrow$ polynômes clés optimaux si $\mathrm{Car}(k) \nmid d$.
4. Evaluation dynamique (Lecerf-v.d. Hoeven 2020).

Proposition (Poteaux-W. 2024)

Il suffit de travailler à précision $\delta_{\mathrm{tame}} \leq \delta$.

Exemple : $f = x^2 - xt^N + t \in \mathbb{F}_2[[t]][x]$, *on obtient* $\delta_{\mathrm{tame}} = 1$ *tandis que* $\delta = N$.

Travail en cours (Poteaux-W.)

Si $\mathrm{Car}(k)$ *divise* d *: remplacer racines approchées par calcul détendu.*

Quelques résultats en lien avec la factorisation locale

- **Courbes algébriques planes**:
  - Factorisation bivariée via une fibre critique (W. 2017)
  - Séries de Puiseux en $\tilde{O}(d\delta)$ (Poteaux-W. 2020)
  - Genre en $\tilde{O}(d^3)$ (Poteaux-W. 2020)

- **Corps de nombres et corps de fonctions**: (Poteaux-W. 2024)
  - Invariants d'Okutsu-Zariski en $\tilde{O}(d\Delta)$
  - Base intégrale d'un idéal fractionnaire en $\tilde{O}(d\Delta + h(I))$

- **Corps henséliens:** (Alberich-Guardia-Nart-Poteaux-Roé-W., 2023)
  - Valuation rang un: factorisation si $\mathrm{Car}(k) = 0$ ou $> d$.
  - Valuation quelconque: irréductibilité si $\mathrm{Car}(k) \nmid d$.
  - Corps valués : extensions de valuations et chaînes de MacLane-Vaquié.

3. Factorisation bivariée et géométrie torique

C'est bientôt fini...

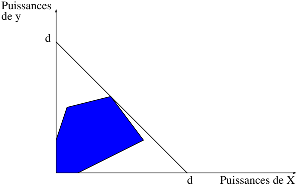
Polygone de Newton

Définition

Le polygone de Newton de $f = \sum c_{ij} x^i y^j \in k[x,y]$ *est l'enveloppe convexe de son support :*

$$\mathrm{N}_f = \mathrm{Conv}((i,j) \in \mathbb{N}^2,\ c_{ij} \neq 0).$$

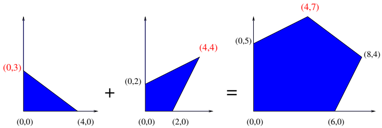
Polynôme de facette : $f_\Lambda = \sum_{(i,j)\in\Lambda} c_{ij} x^i y^j$ *(quasi-homogène).*



A degré fixé, plusieurs polygones

$\Longrightarrow$ Meilleur indicateur de complexité.

$$f_1 = 1 - 2x^4 + y^3 - xy$$
$$f_2 = 3 - x^2 + xy^2 - 2x^4y^4 + y^2$$
$$f_1 f_2 = 3 + 2x^6 + 4x^8y^4 - 2x^4y^7 + y^5 + \cdots$$



$\mathrm{N}_{\mathbf{f_1 f_2}} = \mathrm{N}_{\mathbf{f_1}} + \mathrm{N}_{\mathbf{f_2}}$ (Ostrowski)

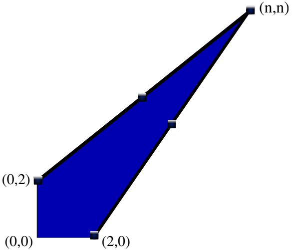
Résultat principal

Définition

*f est **non dégénéré** si $0 \in \mathrm{N}_f$ et si les polynômes de facettes extérieurs sont séparables.*

Théorème (W. 2010)

Suppose $k \subset \mathbb{C}$. Factorisation des polynômes non dégénérés en $O(\mathrm{Vol}(\mathrm{N}_f)^\omega)$ plus le coût des factorisations des polynômes de facettes extérieurs.

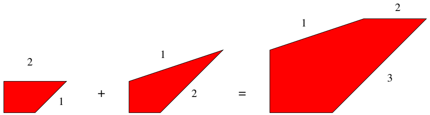


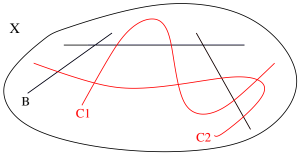
- **Approche dense :**
  $\boldsymbol{O(n^{\omega+1})}$ et $\mathbf{1}$ facto univariée degré $\boldsymbol{2n}$
- **Approche polygone** :
  $\boldsymbol{O(n^{\omega})}$ et $\mathbf{2}$ factos univariées de degré $\mathbf{2}$.

Stratégie torique

Compactification torique X de $\mathbb{A}^2$ telle que :

- Facettes extérieures de N_f $\longleftrightarrow$ Composantes du bord $B = X \setminus \mathbb{A}^2$.
- Factorisation de facettes $\longleftrightarrow$ Décomposition de $C \cap B$, où $C \subset X$ courbe de f.





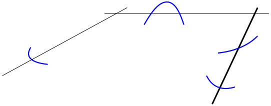
Stratégie : Recombinaisons des développements de Taylor (jets) à l'infini torique.

Précision et recombinaisons

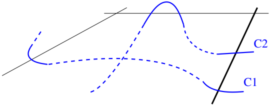
- Décomposition recherchée : $C = C_1 + \cdots + C_s$
- Précisions des calculs : $D = 2\,\mathrm{div}_\infty(f)$
- Développements de Taylor : $C \cap D = \sum_P \gamma_P \in \mathrm{Div}(D)$.

Théorème (W. 2010)

Toute k-combinaison des γ_P qui s'étend à $\mathrm{Div}(X) \otimes k$ est une k-combinaison des $C_i \cap D$.



$\rightsquigarrow$



Preuve

Théorème de Gao-Ruppert, formes logarithmiques, cohomologie des variétés toriques.

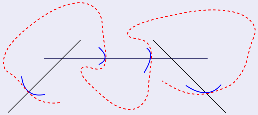
Extension des diviseurs (théorème d'osculation)

Théorème (W. 2010)

Soit $D \subset X$ de support B. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(D) \overset{\alpha}{\to} H^0(X, \Omega_X^2(D))^\vee \to 0$$

où $\alpha(\gamma)$ associe à une 2-forme une somme de résidus.



Preuve

Suite exponentielle, dualité de Serre, cohomologie $\bar\partial$ de Dolbeault, courants résiduels.

Algorithme ($V = \mathrm{Vol}(\mathrm{N}_f)$ et $D = 2\,\mathrm{div}_\infty(f)$.)

- *Calcul $C \cap D$ et construction matrice en $O(dV)$* — *Bernstein-Kushnirenko*
- *Recombinaisons en $O(Vr^{\omega-1})$, r nombre facteurs facettes* — $h^0(\Omega_X^2(D)) = O(V)$
- *Equations des C_i en $O(V^\omega)$* — *Algèbre linéaire **brute force***

Peut mieux faire (merci HDR)

Théorème (W. 2024, non publié)

On peut atteindre ***sur tout corps parfait*** k *la complexité*

$$\tilde{O}(Vr^{\omega-1}) \subset \tilde{O}(d^{\omega+1})$$

conjecturée dans mon mémoire (ouverture 3.3.4).

Preuve

- *Transformation de* N_f *via* $SL_2(\mathbb{Z})$ *tel que* $\mathrm{Vol}(N_f) \approx d_x d_y$ *(Berthomieux-Lecerf 2012)*
- *Factorisation rapide dans* $k[[x]][y]$ *(Poteaux-W. 2022)*
- *Recombinaisons des dérivées logarithmiques dans le cas critique* *(W. 2017)*

Finie la géométrie algébrique complexe (snif).

Conclusion

- Approche singularités (cas unitaire) : $\tilde{\mathcal{O}}(\Delta d^{\omega-1}) \subset \tilde{\mathcal{O}}(d^{\omega+1})$
- Approche polygone de Newton : $\tilde{\mathcal{O}}(V r^{\omega-1}) \subset \tilde{\mathcal{O}}(d^{\omega+1})$
- Approche mixte ?

On introduit le delta-invariant torique :

$$\Delta' = \underbrace{\text{genre arithmétique torique}}_{\text{points entiers intérieurs au polygone}} - \text{genre géométrique} \qquad \boldsymbol{\Delta}' \leq \min(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{V})$$

Factorisation en $\tilde{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\Delta}' \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\omega}-1})$?

Problème

Tenir compte du polygone de Newton lors du calcul du conducteur.

Quelques contributions dont je n'ai pas parlé

- Théorèmes type Abel-inverse torique (thèse, 2008)

  Courants résiduel, variétés toriques, analyse complexe

- Gonalité des courbes algébriques (Schicho-Schreyer-W., 2013)

  Syzygies des courbes canoniques

- Polynômes de discriminant minimaux (Simon-W., 2018)

  G-réduction des courbes planes

- Le lieu flex des hypersurfaces projectives (Busé-D'Andréa-Sombra-W., 2020)

  Résultants multivariés