1 Introduction

Dans ce mémoire, nous verrons, dans un premier temps, ce qu'est une courbe algébrique et une courbe rationnelle. Cela nous permettra alors d'introduire 2 façons de les définir : les fonctions implicites et les paramétrisations. Puis, nous verrons comment passer d'une paramétrisation définissant une courbe à une fonction implicite pour définir cette même courbe. Dans l'autre sens (fonction implicite vers paramétrisation), on verra que le problème est plus compliqué, entre autre car il existe des courbes définies par des fonctions implicites impossibles à définir par des paramétrisations. Alors, on verra comment savoir si une courbe a une paramétrisation ou non (on devra notamment différencié plusieurs cas selon la fonction implicite associée à la courbe). Pour effectuer ces travaux, il nous faudra notamment introduire des outils tels que le résultant ou le genre utiles à certains développements.

Ce travail a beaucoup d'intérêts dans l'étude de courbes car, selon le travail que l'on souhaite effectué, il peut être plus facile de travailler avec une paramétrisation qu'avec une fonction implicite, ou inversement. Par exemple, pour générer des points d'une courbe, on préférera une paramétrisation. Par contre, pour vérifier si un point particulier est sur une courbe, on utilisera plutôt une fonction implicite.

Commençons par définir ce qu'est une courbe algébrique plane.

2 Courbes algébriques planes

Pour la suite, on pose $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $\mathbb{A}^2(K)$ le plan affine associé. Et soit $\mathbb{P}^2(K)$ le plan projectif dans lequel on associe les points (x,y) de $\mathbb{A}^2(K)$ aux points (x : y : 1).

2.1 Définition

On définit une courbe algébrique dans un plan affine par une fonction implicite de la manière suivante :

Définition 1. *Une courbe algébrique plane affine sur $\mathbb{K}$ est un ensemble*

$$C = \{(a,b) \in \mathbb{A}^2(K) | f(a,b) = 0\},$$

avec $f \in \mathbb{K}[x,y]$ un polynôme non constant sans facteurs carrés. Le polynôme f est appelé la fonction implicite définissant C.

Un plan est plus adapté à certains aspects de l'étude de courbes : le plan projectif. En effet, ce plan se définit dans $\mathbb{K}^3$ avec tous les éléments d'une droite passant par 0 correspondant au même élément $(x : y : z) = \{(tx, ty, tz) | t \in \mathbb{K}\}$. En fait, un élément du plan projectif est une droite passant par l'origine dans $\mathbb{K}^3$. Ainsi, si on définit une courbe dans un plan affine (par exemple, le plan $z = 1$), les droites parallèles à celui-ci (passant par l'origine) ne correspondront à aucun élément du plan, on dira alors que ce sont des droites à l'infini (elles correspondent en fait aux points de la courbe situés à l'infini). On définit une courbe algébrique dans le plan projectif de la manière suivante :

Définition 2. *Une courbe algébrique plane projective sur* $\mathbb{K}$ *est un ensemble*

$$C = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}^2(K) | F(a, b, c) = 0\},$$

avec $F \in \mathbb{K}[x, y, z]$ *un polynôme non constant homogène sans facteurs carrés. Le polynôme* F *est appelé la fonction implicite définissant* C.

On travaillera le plus souvent dans le plan affine car on peut faire correspondre les courbes de $\mathbb{A}^2(K)$ et les courbes de $\mathbb{P}^2(K)$. En effet, lorsque l'on a une courbe C définie par une fonction f avec

$$f(x, y) = f_d(x, y) + f_{d-1}(x, y) + ... + f_0(x, y)$$

sa décomposition en somme de polynômes homogènes (où $\forall i f_i$ est un polynôme homogène de degré i). Alors la courbe correspondante dans $\mathbb{P}^2(K)$ est définie par la fonction :

$$F(x, y, z) = f_d(x, y) + f_{d-1}z + ... + f_0(x, y)z^d$$

Alors, chaque point (a,b) de C correspond à un point (a : b : 1) de $C^* = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2(K) | F(a, b, c) = 0$ et les autres points de C^* sont des points à l'infini. Ainsi, C^* n'a qu'un nombre fini de points additionnels.

Dans l'autre sens, si l'on a une courbe C du plan projectif, il existe une infinité de courbes affines lui correspondant. On peut prendre n'importe quelle droite du plan projectif comme droite à l'infini, même si, usuellement, on préfèrera prendre l'un des axes du plan comme droite à l'infini.

Définition 3. *On dit qu'une courbe algébrique plane est irréductible si elle ne peut pas s'écrire comme union de* 2 *courbes algébriques distinctes.*

Lemme 1. *Une courbe est irréductible si et seulement si son polynôme implicite est irréductible.*

Démonstration. Soit C une courbe algébrique et f son polynôme implicite.

Si C est irréductible, Supposons qu'il existe f_1 et f_2 tels que $f = f_1 f_2$. Alors $f_1 \neq f_2$ car f est sans facteurs carrés d'après la définition d'un polynôme implicite. Donc, f_1 définit une courbe C_1 sur les points (x, y) tels que $f_1(x, y) = 0$ et f_2 définit une courbe C_2 distincte de C_1. Or f s'annule si et seulement si f_1 s'annule ou f_2 s'annule (car $kp[x, y]$ est intègre). Cela donne $C = C_1 \bigcup C_2$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

Si maintenant on suppose que f est irréductible, supposons $C = C_1 \bigcup C_2$ où C_1 est une courbe de polynôme implicite f_1 et C_2 est une courbe de polynôme implicite f_2. Alors $f_1 f_2$ s'annule sur presque tout C et sur un nombre fini de points n'appartenant pas à C. $f_1 f_2$ est donc le polynôme implicite associée à C, d'où la contradiction. □

2.2 Singularités

Définition 4. *Soit* C *une courbe algébrique plane de fonction implicite* f *et soit* $P = (x, y) \in C$. *On dit que* P *est une singularité de* C *si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Soit $r \in \mathbb{N}, r > 1$, On dit que P est une singularité de multiplicité r sur C si et seulement si :

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i y^j}(x,y) = 0 \quad \forall i,j \in \mathbb{N}, i+j \leq r$$

et si au moins l'une des dérivées partielles d'ordre $r+1$ ne s'annule pas en P. On dit que P est un point simple si il est de multiplicité 1.

Remarque 1. *Soit $f = f_d + f_{d-1} + ... + f_0$ la décomposition de f en somme de polynômes homogènes avec $\deg(f_i) = i$. Alors $P = (0,0)$ est une singularité de multiplicité r si et seulement si $f_i = 0$ pour $i \leq r$ et $f_{r+1} \neq 0$.*

Dans ce mémoire, on se concentrera essentiellement sur les courbes à singularités ordinaires, c'est à dire :

Soit C une courbe, f son polynôme implicite et supposons que le point $(0,0)$ est une singularité de multiplicité r pour f (par translation, on ne change pas la géométrie de C et on peut toujours se ramener, si f a une singularité, à un repère dans lequel (0,0) est cette singularité). Alors, pour tout $i = 0, ..., r$, $f_i = 0$ et f_{r+1} définit l'espace tangent à C en $(0,0)$ (car c'est le terme de plus bas degré dans sa décomposition de Taylor). Posons,

$$f_{r+1}(x,y) = \sum_{i=0}^{r+1} a_i x^i y^{r+1-i}$$

Si $y \neq 0$, on a alors :

$$f_{r+1}(x,y) = y^{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} a_i \frac{x^i}{y^i}$$

or, si $a_{r+1} \neq 0$, $\sum_{i=0}^{r+1} a_i t^i$ est de degré $r+1$ et donc possède $r+1$ racines (pas nécessairement distinctes) car on se place dans un corps algébriquement clos. Soit $t_0, t_1, ..., t_r$ ces racines :

$$f_{r+1}(x,y) = y^{r+1} \prod_{i=0}^{r} (\frac{x}{y} - t_i) = \prod_{i=0}^{r} (x - t_i y)$$

L'espace tangent à f en $(0,0)$ est donc définit par $r+1$ droites.

On dit que qu'une singularité est ordinaire si toutes ces droites sont distinctes, c'est-à-dire si pour tout $i = 0, ..., r$, $j = 0, ..., r$, $i \neq j$, on a $t_i \neq t_j$.

Remarque 2. *En réalité, on a pas nécessairement $a_{r+1} \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, on peut tout de même faire le même travail en factorisant par des puissances différentes de x et de y pour obtenir un polynôme de degré $r+1$ en $\frac{x}{y}$.*

Sous maxima, on obtient un algorithme (nommé SinguOrdi) permettant de tester si une fonction n'a que des singularités ordinaires. Pour cela, pour chaque singularité, on étudie la composante homogène de degré égal à la multiplicité de la singularité après avoir effectué la translation à l'origine. Pour voir si la multiplicité de chaque composante linéaire $x - t_i y$ est égale à 1, on regarde si cette composante apparait encore si l'on dérive par rapport à x ou y.

2.3 Le genre

Intuitivement, on définit le genre d'une courbe C de degré d comme la différence entre le nombre de singularités maximum que peuvent avoir les courbes de degré d et le nombre de singularités que C possède véritablement.

Comme on travaille avec des courbes possédant uniquement des singularités ordinaires, le genre est clairement déterminé par le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit C une courbe avec uniquement des singularités ordinaires (on appelle $sing(C)$ l'ensemble de ces singularités), et d son degré. Alors :*

$$genus(C) = \frac{1}{2}\left[(d-1)(d-2) - \sum_{P \in Sing(C)} mult_P(C)(mult_P(C)-1)\right].$$

3 Courbes rationnelles

3.1 Définition et premières propriétés

On rappelle qu'une fonction rationnelle $R(t)$ est une fonction telle que $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ avec $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ et $Q(t) \in \mathbb{K}[t]$ où $Q(t)$ n'est pas le polynôme nul.

Définition 5. *Soit $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ une fonction rationnelle. le degré de $R(t)$ est définit comme le maximum entre le degré de $P(t)$ et le degré de $Q(t)$, c'est-à-dire :*

$$deg(P(t)) = max\{deg(P(t)), deg(Q(t))\}$$

Définition 6. *Soit C une courbe algébrique plane affine (i.e dans $\mathbb{A}^2(K)$). On dit que C est rationnelle (ou paramétrable) s'il existe des fonctions rationnelles $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$ telles que :*

1. *Pour presque tout t_0 (i.e pour tous excepté un nombre fini de t_0), le point $(\chi_1(t_0), \chi_2(t_0))$ est sur C,*
2. *Pour presque tout $(x_0, y_0) \in C$, $\exists t_0 \in \mathbb{K}$ tel que $(x_0, y_0) = (\chi_1(t_0), \chi_2(t_0))$.*

La fonction $\chi(t) := (\chi_1(t), \chi_2(t))$ est alors une paramétrisation rationnelle affine de C. On dit que cette paramétrisation est sous forme réduite si $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$ sont sous forme réduite, i.e pour $i = 1, 2$, le numérateur et le dénominateur de $\chi_i(t)$ n'ont pas de facteurs irréductibles communs.

Théorème 2. *Toute courbe rationnelle est irréductible.*

Démonstration. Soit C une courbe rationnelle et $\chi(t)$ sa paramétrisation. Soit $I(C)$ l'idéal de C i.e $I(C)$ est l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[x, y]$ s'annulant sur tout les points de C. En particulier tout $h \in I(C)$ s'annule sur tout les points de C généré par $\chi(t)$, donc, comme il n'existe qu'un nombre fini de t qui ne correspondent à aucun points de la courbe, et par continuité de h et de χ, $\forall t \in \mathbb{K}, h(\chi(t) = 0$. Réciproquement, soit $h \in \mathbb{K}[x, y]$ tel que $\forall t \in \mathbb{K}, h(\chi(t) = 0$. h s'annule sur presque tout les points de C (tout ceux générés par $\chi(t)$) et, comme C est l'adhérence de l'image de χ pour la topologie de Zariski, et par continuité de h pour cette même topologie, h s'annule sur tout point de C donc $h \in I(C)$.

Ceci prouve :

$$I(C) = \{h \in \mathbb{K}[x,y] | h(\chi(t)) = 0\}.$$

Or, un ensemble algébrique est irréductible si et seulement si l'idéal qui lui correspond est premier (i.e $\forall a, b \in \mathbb{K}[x,y], ab \in I(C) \implies a \in I(C)$ ou $b \in I(C)$). Cette dernière propriété est vrai car, si $f, g \in \mathbb{K}[x,y] | fg \in I(C)$, alors $\forall t, fg(\chi(t)) = f(\chi(t))g(\chi(t)) = 0$ donc $f(\chi(t)) = 0$ ou $g(\chi(t)) = 0$ donc $f \in I(C)$ ou $g \in I(C)$. D'où C est irréductible. □

3.2 Quelles courbes sont rationnelles ?

Une courbe est rationnelle si et seulement si son genre est nul
Par le Théorème 2, on sait aussi que si une courbe n'est pas irréductible, elle ne peut pas être rationnelle.

3.3 Paramétrisation propre

Sachant que plusieurs paramétrisations existent pour une même courbe, il est naturel de se demander si on peut en choisir une plus simple que les autres. Par exemple, pour la courbe $y = x^2$ ($f(x,y) = y - x^2$), on a les paramétrisations (t, t^2) mais aussi (t^2, t^4), (t^3, t^6), etc... La première paramétrisation est évidemment la plus simple, le degré est moindre comparé aux autres et on s'aperçoit aussi que presque-tout les points de C correspondent à précisément une valeur de t. De là, on définit un type de paramétrisation de la manière suivante :

Définition 7. *Une paramétrisation affine $\chi(t)$ d'une courbe rationnelle C est dite propre si χ est bijective, c'est-à dire si presque tout point de C est généré par une unique valeur de t.*

Lemme 2. *Toute courbe rationnelle peut-être paramétrée par une paramétrisation propre.*

Par la suite, on aura besoin de la propriété suivante des paramétrisation propre :

Théorème 3. *Soit C une courbe affine rationnelle de polynôme implicite $f \in \mathbb{K}[x,y]$ et soit $\chi(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t))$ une paramétrisation de C. Alors $\chi(t)$ est propre si et seulement si :*

$$deg(\chi(t)) = max\{deg_x(f), deg_y(f)\}.$$

De plus, si $\chi(t)$ est propre et $\chi_1(t)$ est non nul, alors $deg(\chi_1(t)) = deg_y(f)$ et de même, si $\chi_2(t)$ est non nul, alors $deg(\chi_2(t)) = deg_x(f)$.

3.4 Le tracing index

Lorsqu'une paramétrisation n'est pas propre, on peut se demander

Définition 8. *Soit $\chi(t)$ une paramétrisation affine d'une courbe rationnelle C. L'indice de $\chi(t)$ (Index en anglais) est le cardinal de la pré-image d'un point générique de C par χ, c'est à dire l'unique entier n tel que*

$$Card(\{t \in \mathbb{K},\ \chi(t) = P\}) = n$$

pour presque tout point P de C.

Ainsi, une paramétrisation propre est une paramétrisation d'indice 1.
Soit $\chi(t) = (\frac{\chi_{11}(t)}{\chi_{12}(t)}, \frac{\chi_{21}(t)}{\chi_{22}(t)})$
Posons :

$$G_1^{\chi}(s,t) = \chi_{11}(s)\chi_{12}(t) - \chi_{12}(s)\chi_{11}(t)$$

$$G_2^{\chi}(s,t) = \chi_{21}(s)\chi_{22}(t) - \chi_{22}(s)\chi_{21}(t)$$

Théorème 4. *Soit $\chi(t)$ une paramétrisation sous forme réduite d'une courbe rationnelle C. Alors :*

$$Index(\chi(t)) = deg_t(gcd(G_1^{\chi}(s,t), G_2^{\chi}(s,t)).$$

Par ce théorème, on obtient un algorithme de calcul d'indice, que nous avons programmé sous maxima (la fonction TraInd(P)).

4 Résultants

On introduit ici le résultant, outil permettant de tester si 2 polynômes de $\mathbb{K}[x]$ ont un facteur commun.

Lemme 3. *Soient $f, g \in \mathbb{K}[x]$ 2 polynômes de degrés respectifs $l > 0$ et $m > 0$. Alors f et g ont un facteur commun si et seulement s'il existe 2 polynômes $A, B \in \mathbb{K}[x]$ tels que :*

1. *A et B ne sont pas tout les deux nuls*
2. *A est de degré au plus $m-1$ et B est de degré au plus $l-1$*
3. *$Af + Bg = 0$*

Posons

$$f(x) = a_0x^l + ... + a^l, a_0 \neq 0$$

$$g(x) = b_0x^m + ... + b_m, b_0 \neq 0$$

Dans le cas où f et g ont un facteur commun, il existe A, B comme dans le lemme. Posons :

$$A(x) = c_0x^{m-1} + ... + c_{m-1}$$

$$B(x) = d_0x^{l-1} + ... + d_{l-1}$$

Tous les coefficients de $Af + Bg$ doivent être nuls par le lemme donc :

$$\begin{array}{ccccccl}
a_0c_0 & + & b_0d_0 & & = & 0 & \text{coef. de } x^{m+l-1}. \\
a_1c_0 + a_0c_1 & + & b_1d_0 + b_0d_1 & & = & 0 & \text{coef. de } x^{m+l-2}. \\
\ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \\
& a_lc_{m-1} & + & b_md_{l-1} & = & 0 & \text{coef. de } x^0.
\end{array}$$

On définit la matrice de Sylvester de f et g comme la matrice $Syl(f,g,x)$ de taille $(l+m)\times(l+m)$ telle que :

$$Syl(f,g,x) = \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & b_2 & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & & \ddots & b_0 \\ & \vdots & & a_1 & & \vdots & & b_1 \\ a_l & & & & b_m & & & \\ & a_l & & \vdots & & b_m & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_l & & & & b_m \end{pmatrix}$$

où les espaces vides sont remplis de zéros. Le système d'équations précédent peut donc être traduit par :

$$Syl(f,g,x) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or l'équation matricielle $Syl(f,g,x)X = 0$ (où X est un vecteur colonne de taille $(l+m)$) a au moins une solution non nulle si et seulement si $Syl(f,g,x)$ n'est pas inversible, c'est à dire si son déterminant est nul. D'où la définition du résultant :

Définition 9. *Soit $f, g \in \mathbb{K}[x]$. On appelle résultant par rapport à la variable x (noté $res_x(f,g)$ ou $res(f,g,x)$) le déterminant de la matrice de Sylvester de f et g par rapport à la variable x, i.e :*

$$res_x(f,g) := det(Syl(f,g,x))$$

Remarque 3.

1. *On a bien la propriété désirée au départ : f et g ont un facteur commun si et seulement si $res_x(f,g) = 0$. En particulier, si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, $res_x(f,g) = 0$ si et seulement si f et g ont au moins une racine commune dans $\mathbb{K}$.*
2. *Remarquons que si f et g sont à coefficients dans un anneau quelconque R, leur résultant est à coefficient dans R. En particulier, on peut appliquer la définition à des polynômes à plusieurs variables ; ainsi le résultant par rapport à z de deux polynômes dans $\mathbb{K}[x,y,z] \simeq \mathbb{K}[x,y][z]$ est un polynôme de $\mathbb{K}[x,y]$.*

5 Implicitisation

Dans cette section, nous allons rechercher comment, à partir d'une courbe rationnelle C dont on a la paramétrisation, on peut retrouver sa fonction implicite, c'est-à-dire le polynôme (unique à une constante prés) qui s'annule sur presque-tout les points de C et sur un nombre fini de points hors de la courbe. Il est toujours possible de trouver un tel polynôme car les courbes rationnelles sont, plus généralement, des courbes algébriques planes définies comme dans la définition 1. Pour cela, nous allons voir que les théorèmes nous montrent deux moyens différents d'atteindre notre objectif.

On note :

$$H_1^{\chi}(t,x) = \chi_{12}(t)x - \chi_{11}(t)$$
$$H_2^{\chi}(t,y) = \chi_{22}(t)y - \chi_{21}(t)$$

5.1 Première méthode

Lemme 4. *Soit C une courbe affine rationnelle sur $\mathbb{K}$ d'équation implicite $f = 0$, où $f \in \mathbb{K}[x,y]$ est un polynôme irréductible et soit $\chi(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t))$ une paramétrisation rationnelle de C. Alors, $\exists r \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{K}^*$ tel que*

$$Res_t(H_1^{\chi}(t,x), H_2^{\chi}(t,x)) = (f(x,y))^r.$$

Démonstration. Posons $\chi_i(t) = \frac{\chi_{i1}(t)}{\chi_{i2}(t)}$ que l'on supposera sous forme réduite. Soit $h(x,y) = res_t(H_1^{\chi}(t,x), H_2^{\chi}(t,y))$. Les polynômes H_1^{χ} et H_2^{χ} sont irréductibles : pourquoi... Donc, H_1^{χ} et H_2^{χ} n'ont pas de facteurs communs et par définition du résultant, h n'est pas le polynôme nul. h n'est pas constant non plus car pour $t_0 \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_{12} \neq 0$ et $\chi_{22} \neq 0$:

$$H_1^{\chi}(t_0, \chi_1(t_0)) = \chi_{12}(t_0)\chi_1(t_0) - \chi_{11}(t_0) = 0$$

$$H_2^{\chi}(t_0, \chi_2(t_0)) = \chi_{22}(t_0)\chi_2(t_0) - \chi_{21}(t_0) = 0$$

Ainsi, les polynômes $H_1^{\chi}(t, \chi_1(t_0))$ et $H_2^{\chi}(t, \chi_2(t_0))$ ont une racine commune en $t = t_0$ donc

$$h(\chi(t_0)) = Res_t(H_1^{\chi}(t, \chi_1(t_0)), H_2^{\chi}(t, \chi_2(t_0)) = 0$$

d'après les propriétés du résultant. Comme h n'est pas identiquement nul, il ne saurait être constant.

1)Soit h' la partie sans facteurs carrés de h (tel que tous les facteurs irréductibles de h apparaissent avec multiplicité 1 dans h'). Donc $h'(\chi(t)) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{K}$ et h' s'annule sur C sauf éventuellement en un nombre fini de points.

2)De plus, soit (x_0, y_0) un point du plan affine tel que $h'(x_0, y_0) = 0$. Alors, $\exists t_0 \in \mathbb{K}$ tel que $H_1^{\chi}(t_0, x_0) = H_2^{\chi}(t_0, y_0) = 0$ d'après les propriétés du résultants, c'est à dire

$$\chi_{12}(t_0)x_0 - \chi_{11}(t_0) = \chi_{22}(t_0)y_0 - \chi_{21}(t_0) = 0. \tag{1}$$

Or, $\chi_{12}(t_0) \neq 0$ car sinon on aurait $\chi_{11}(t_0) = \chi_{12}(t_0) = 0$ par (1), contredisant le fait que χ_1 est sous forme réduite. De même $\chi_{22}(t_0) \neq 0$ et finalement

$$h'(x_0, y_0) = 0 \Longrightarrow (x_0, y_0) = \chi(t_0) \Longrightarrow (x_0, y_0) \in C$$

Par 1) et 2), on prouve donc :

$$\{h' = 0\} \subset C$$

Comme C est irréductible d'après le Théorème 2, on a forcément $h' = cf$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{K}$ et $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que $h(x, y) = (h'(x, y))^r$. □

Remarque 4. *Il existe un autre théorème disant que le r de ce lemme est en fait l'indice de la paramétrisation (donc $r = 1$ pour une paramétrisation propre, ce qu'on va voir dans la section 5.2). Cependant, ce théorème n'est pas nécessaire pour déterminer f.*

La première méthode consiste donc à calculer $Res_t(H_1^\chi(t, x), H_2^\chi(t, x))$. Puis, pour trouver l'équation f a partir de f^r, il suffit de diviser f par le pgcd de f et de sa dérivée.

On obtient l'algorithme Implicit(P) programmé sous maxima.

5.2 Deuxième méthode

Théorème 5. *Soit $\chi(t)$ une paramétrisation propre sous forme réduite d'une courbe affine rationnelle C. Alors, le polynôme implicite définissant C est :*

$$res_t(H_1^P(t, x), H_2^P(t, y)).$$

Démonstration. Soit $\chi(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t))$.

On sait par le théorème 3 que $deg_y(f) = deg(\chi_1(t))$ et $deg_x(f) = deg(\chi_2(t))$, or $deg_t(H_1^P(t, x)) = deg(\chi_1(t))$ et $deg_t(H_2^P(t, y)) = deg(\chi_2(t))$, donc on peut écrire H_i^P de la forme suivante :

$$H_1^P(t, x) = a_m(x)t^m + ... + a_0(x)$$

$$H_2^P(t, y) = a_n(y)t^n + ... + a_0(y)$$

où $m = deg_y(f)$, $n = deg_x(f)$ et les a_i sont de degré au plus 1 en x et les b_i sont de degré au plus 1 en y.

Soit $R(x, y) = res_t(H_1^P(t, x), H_2^P(t, y)) = det(A)$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_m(x) & \cdots & \cdots & \cdots & a_0(x) & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & a_m(x) & \cdots & \cdots & \cdots & a_0(x) \\ b_n(y) & \cdots & \cdots & \cdots & b_0(y) & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & b_n(y) & \cdots & \cdots & \cdots & b_0(y) \end{pmatrix}$$

Alors, par le calcul du déterminant, sachant que chaque $a_i(x)$ est de degré au plus 1, on voit que $deg_x(R) \leq n$ (les a_i étant placés sur les n premières lignes). De même, $deg_y(R) \leq m$.

Dans la relation du lemme 4, on voit qu'il faut $r = 1$ pour avoir les 2 inégalités précédentes, ce qui donne le résultat. □

Sachant cela, la deuxième méthode consiste à reparamétrer proprement avant de faire le calcul de la résultante.

Pour reparamétrer proprement une paramétrisation $\chi(t)$, il nous faut G_1^{χ} et G_2^{χ} définis comme dans la section sur le tracing index, c'est-à-dire :

$$G_1^{\chi}(s,t) = \chi_{11}(s)\chi_{12}(t) - \chi_{12}(s)\chi_{11}(t)$$

$$G_2^{\chi}(s,t) = \chi_{21}(s)\chi_{22}(t) - \chi_{22}(s)\chi_{21}(t)$$

et on pose : $G^{\chi}(s,t) = PGCD(G_1^{\chi}(s,t), G_2^{\chi}(s,t))$. Si $deg(G^{\chi}) = 1$, $\chi(t)$ est propre, sinon on prends α et β dans $\mathbb{K}$ tels que $G^{\chi}(\alpha,\beta) \neq 0$, et a,b,c,d dans $\mathbb{K}$ tels que $ad - bc \neq 0$ (par exemple $a = d = 1$ et $b = c = 0$) puis on pose :

$$R(t) = \frac{aG^{\chi}(\alpha,t) + bG^{\chi}(\beta,t)}{cG^{\chi}(\alpha,t) + dG^{\chi}(\beta,t)}$$

De là, on a 2 possibilités. La première consiste à résoudre $\chi(t) = \chi_0(R(t))$ sachant que $\chi_0(t)$ est une paramétrisation rationnelle de degré $\frac{deg(\chi(t))}{R(t)}$. Nous allons utiliser la deuxième possibilité. On sait que si $\chi_0(t) = (\frac{\xi_{11}(t)}{\xi_{12}(t)}, \frac{\xi_{21}(t)}{\xi_{22}(t)})$ est une paramétrisation propre de la courbe, en posant $g_i(x,y) = \xi_{i1}(y) - x\xi_{i2}(y)$ pour $i = 1,2$, ces fonctions implicites correspondent à la paramétrisation $(\frac{\chi_{i1}(t)}{\chi_{i2}(t)}, R(t))$. Il suffit donc d'impliciter ces 2 paramétrisations (par la méthode 1) et de sortir le coefficient en x^0 et le coefficient en x des g_i pour obtenir la paramétrisation propre.

Ce dernier procédé a été programmé sous maxima et correspond à la fonction Reparam(P).

5.3 Comparaison des méthodes 1 et 2

Si, dans un premier temps, l'idée de la deuxième méthode peut avoir l'air intéressante, on s'aperçoit vite lorsque l'on développe l'algorithme de reparamétrisation que ce n'est pas le cas. En effet, celui-ci utilise en fait l'algorithme d'implicitisation développé par la méthode 1. L'autre option demande de résoudre un système d'équations linéaires avec un grand nombre d'inconnus et n'est donc pas intéressante au niveau de la complexité.

6 Paramétrisation des courbes rationnelles

Dans ce chapitre, partant d'une courbe algébrique plane de polynôme implicite f, nous allons voir comment obtenir une paramétrisation si la courbe est rationnelle. On va voir que le problème que l'on se pose est plus compliqué selon le degré de f et selon certaines conditions qui pourraient nous aider (notamment sur les singularités). La méthode utilisée consiste à créé un système de courbes déterminées par un paramètre qui va parcourir la courbe à paramétré en un point d'intersection lié à ce paramètre. Dans un premier temps, nous allons donc devoir étudier deux éléments indispensables à l'étude d'intersections entre 2 courbes.

6.1 la multiplicité d'une intersection

Prenons 2 courbes algébriques planes affines C et D de polynômes implicites $f \in \mathbb{K}[x,y]$ et $g \in \mathbb{K}[x,y]$ respectivement. Soit F et G les polynômes homogénéisés de f et g respectivement ($F(x,y,1) = f(x,y)$ et $G(x,y,1) = g(x,y)$, F et G étant les polynômes de C et de D comme courbes projectives, on passe de f,g à F,G de la manière décrite dans la section 2.1) et $R \in \mathbb{K}[x,y]$ le résultant de F et G par rapport à z. Si $(x_0,y_0) \in \mathbb{A}^2(K)$ est un point d'intersection de C et D, alors $F(x_0,y_0,1) = G(x_0,y_0,1) = 0$ donc $R(x_0,y_0) = 0$. En fait, R s'écrit :

$$R(x,y) = \prod_{i=1}^{s}(b_i x - a_i y)^{r_i}$$

où chaque composante $(b_i x - a_i y)^{r_i}$ correspond à un point d'intersection $P = (a_i, b_i)$. r_i est alors la multiplicité de l'intersection (noté $mult_P(C,D)$). Tout point n'étant pas dans l'intersection des 2 courbes a pour multiplicité 0.

6.2 Le théorème de Bézout

Théorème 6. *(théorème de Bézout) Soit C et D 2 courbes projectives de degrés n et m dans $\mathbb{P}^2(K)$ sans composantes communes. Alors ils ont exactement nm points d'intersections en comptant leurs multiplicités, c'est-à-dire :*

$$\sum_{p \in C \bigcap D} mult_p(C,D) = nm$$

Théorème 7. *(forme faible du théorème de Bézout) Soit C et D 2 courbes projectives de degrés n et m dans $\mathbb{P}^2(K)$ sans composantes communes. Alors C et D s'intersectent en au plus nm points.*

Remarque 5. *On se place dans l'espace projectif car il est possible que certains points d'intersection se situent sur la droite à l'infini.*

6.3 Deux cas simples

6.3.1 Le cas des coniques

Définition 10. *Une conique est une courbe algébrique plane de degré 2, c'est-à-dire dont le polynôme implicite est de degré 2.*

Soit C une conique et f son polynôme implicite.

Supposons que C passe par un point $P = (x_0, y_0)$, on se place par translation dans un repère où ce point est à l'origine :

$$g(x,y) = f(x + x_0, y + y_0)$$

On décompose g en une somme de polynômes homogènes $g = g_2 + g_1 + g_0$ (où g_i est un polynôme homogène de degré i). $g(0,0) = 0$ donc $g_0 = 0$.

On va chercher à paramétrisé les points de C par des droites passant par (0,0). Par le théorème de Bézout (forme faible), on sait que ces droites intersectent au plus 2 fois avec C (car les droites sont de degré 1 et C est de degré 2). Donc, comme les droites coupent déjà C en $(0,0)$, chaque droite définit un point de C. De plus, comme l'ensemble des droites passant par $(0,0)$ parcourent la totalité du plan, C est entièrement définit par ces droites.

Soit $t \in \mathbb{K}[x,y]$ et D_t la droite d'équation $y = tx$. Les points d'intersection entre D_t et C sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} y = tx \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} y = tx \\ g_1(x,tx) + g_2(x,tx) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ xg_1(1,t) + x^2 g_2(1,t) = 0 \end{cases}$$

car si $F(x,y)$ est un polynôme homogène de degré i, $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^i F(x,y)$. Cela donne les solutions suivantes :

$$O = (0,0) \text{ et } Q(t) = \left(-\frac{g_1(1,t)}{g_2(1,t)}, -\frac{tg_1(1,t)}{g_2(1,t)} \right).$$

$Q(t)$ est une paramétrisation de la courbe.

6.3.2 Le cas de courbes avec une singularité particulière

Soit C une courbe de degré d et f son polynôme implicite tel que C possède une singularité $P = (x_0, y_0)$ de multiplicité $d-1$. On peut mener le même raisonnement que dans la section précédente concernant les coniques. On fait donc une translation pour placer la singularité à l'origine et le polynôme g obtenu est tel que $g = g_d + g_{d-1}$ où g_i est un polynôme homogène de degré i. En résolvant le système d'équation :

$$\begin{cases} y = tx \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

on obtient, de la même manière que pour les coniques, précisément 2 solutions :

$$O = (0,0) \text{ et } Q(t) = \left(-\frac{g_{d-1}(1,t)}{g_d(1,t)}, -\frac{tg_{d-1}(1,t)}{g_d(1,t)} \right).$$

d'où la paramétrisation de C.

Théorème 8. *Une courbe de degré d est paramétrable par des droites si et seulement si elle possède une singularité de multiplicité* $(d-1)$.

6.4 Le cas des courbes à singularités ordinaires

Dans le cas de courbes plus complexes, il est impossible de les paramétrer par des droites (théorème précedent). On va donc chercher à les paramétrer par des courbes de degré plus grand que 1. On va chercher à créer un ensemble de courbes dépendantes d'un paramètre t qui couperont la courbe à paramétrée en un point dépendant de t. Si on prend des courbes de degré $k > 1$ pour paramétrer la courbe donnée, ces courbes seront définis par des polynômes de la forme :

$$P(x,y) = \sum_{i+j=0}^{k} a_{ij} x^i y^j.$$

Chacune des courbes est définie par l'ensemble de ces coefficients, c'est-à-dire $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ paramètres. Cependant, on veut un ensemble de courbes dont chacune est déterminée par un seul paramètre. Pour réduire ces paramètres, on va alors devoir imposer des conditions à ces courbes qui entrainent des conditions linéaires sur les coefficients. En fait, on va prendre imposer un nombre suffisant de points par lequel toutes les courbes devront passer pour qu'il ne reste plus qu'un paramètre. Les points devront être correctement choisis car imposer à une courbe de passer par un point ne réduit pas nécessairement le nombre de ces paramètres .

Ceci est traduit par la définition suivante :

Définition 11. *Un système linéaire de courbes H paramétrise C si et seulement si :*

1. $dim(H) = 1$
2. *L'intersection d'un élément de H et de C contient un point variant dont les coordonnées dépendent du paramètre de l'élément de H*
3. *C n'a de composante continue commune avec aucune des courbes de H*

Pour trouver le bon système de courbes, nous aurons besoin des courbes "adjointes" dont la définition est la suivante (définition valable uniquement dans le cas de singularités ordinaires. Généralement, la définition est plus compliquée) :

Définition 12. *Une courbe projective C' est une courbe adjointe à la courbe projective irréductible C si et seulement si $mult_P(C') \geq mult_P(C) - 1$ pour toute singularité P de C. On appelle $A_k(C)$ l'ensemble des courbes adjointes de degré k, c'est-à-dire :*

$$A_k(C) = \{C' \in \mathbb{P}^2(K) | deg(C') = k, \forall P \in Sing(C), mult_P(C') \geq mult_P(C) - 1\}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et pour tout i, P_i est un point du plan, On définit l'ensemble $H(k, \sum_i P_i)$ comme l'ensemble des courbes de degré k passant par tout les points P_i.

Théorème 9. *Soient C une courbe projective de degré d et de genre 0, $k \in d-1, d-2$ et $S_k \subset C$*
$Sing(C)$ tel que $Card(S_k) = kd - (d-1)(d-2) - 1$. Alors :

$$A_k(C) \cap H(k, \sum_{P \in S_k} P)$$

paramétrise C.

Ce premier théorème paramétrise une courbe de degré d par des courbes de degré $d-1$ ou $d-2$. On peut aussi paramétré une courbe de degré d par des courbes de degré d par le théorème suivant :

Théorème 10. *Soient C une courbe projective de degré d et de genre 0, $Q \in \mathbb{P}^2(K)$*
C et $S_d \subset C$
$Sing(C)$ tel que $Card(S_d) = 3(d-1)$. Alors :

$$A_d(C) \cap H(d, \sum_{P \in S_d} P)$$

paramétrise C.

Sous maxima, on a écrit un algorithme (nommé Adjoint) qui, à partir d'une courbe C de degré d et de fonction implicite f, permet de calculer la forme d'un adjoint de C de degré $d-2$. Pour cela, on créé un polynôme P de degré $d-2$ avec des coefficients quelconques. Pour imposer une singularité d'une multiplicité minimale m, il suffit alors de faire une translation pour se ramener à l'origine et de résoudre le système d'équations linéaires d'inconnus les coefficients de P traduisant le fait que tout les polynômes homogènes de degré strictement inférieur à m doivent être identiquement nuls. Pour plus de singularités, on rajoute les équations correspondantes au système et finalement, l'algorithme renvoi un polynôme qui aura parmi ses singularités les singularités de f avec une multiplicité minimum égale à celle de f moins 1.

Références

[SWPD07] Sendra,