

TP 5 : Matrices

On pourra se référer entre autres aux documents disponibles sur ecampus :

- Tutoriel Sage, section 2.10
- Calcul mathématique avec Sage, section II.8 (plus complet)

Exercice 1 (Procédures standards de Sage) 1. Matrice nulle ? Matrice identité ? Matrice diagonale ?

2. Déterminer A une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{F}_3)$, puis :

- Afficher l'élément a_{23} de A . Afficher la ligne d'indice 2 de A . Afficher la colonne d'indice 0 de A . Liste des lignes de A ? Nombre de colonnes de A ?
- Extraire la sous-matrice $C = (a_{ij})_{0 \leq i \leq 1, 2 \leq j \leq 4}$ de A .
- Taper $B=A$ puis modifier un coefficient de B . Que devient A ? Comment éviter cela ?

3. Déclarer l'anneau $\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{Q})$. Remonter A dans cet anneau.

- Rang de A ? Base du noyau gauche de A ? Noyau droite ?
- Base du s.e.v engendré par les colonnes de A ? Par les lignes de A ?

4. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z})$ une matrice "aléatoire".

- Déterminant de A ? Inverse de A ? Décomposition PLU de A ?
- Polynôme caractéristique de A ? Polynôme minimal de A ?
- Valeurs propres de A ?
- Calculer $(A \cdot A)^2$. Evaluer la fonction $(5X^2 + 3)/X$ en A .

Exercice 2 (Résolution de systèmes linéaires) Résoudre avec Sage l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Même question avec $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Programmer l'algorithme de Gauss-Jordan qui calcule la forme échelonnée réduite en ligne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Comparer avec Sage sur quelques exemples, en considérant $K = \mathbb{F}_3$, puis $K = \mathbb{Q}$. Comment lire le rang de A sur sa forme réduite ?

Exercice 4 Implémenter l'algorithme de Keller-Gehrig permettant de calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A sous l'hypothèse que χ_A est irréductible. Comparer avec Sage sur quelques exemples. Que peut-il se passer si χ_A n'est pas irréductible (regarder des matrices sur \mathbb{F}_2 pour observer) ?