UFR Sciences
M2 Calcul Formel

Martin WEIMANN

TP 8 : Polynômes à plusieurs variables

Référence: *Calcul mathématiques avec Sage* (chapitre 9).

1 Résultant et applications

Exercice 1 (Calcul de résultant) Implémenter deux procédures pour calculer le résultant en y de deux polynômes de $\mathbb{Q}[x, y]$. L'un via la matrice de Sylvester, l'autre via une variante de l'algorithme d'Euclide étendu (cf Corollaire 2 Section 1.4 du CM). Comparer avec la commande de Sage.

Exercice 2 (Résolution de systèmes à deux variables à l'aide du résultant)

1. Tracez sur un même graphique les courbes d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ et $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. Combien comptez-vous de points d'intersections ?

2. Par un calcul de résultant, déterminer les abscisses des points d'intersections (à coordonnées réelles). En déduire les coordonnées de ces points. Vos calculs sont-ils compatibles avec vos observations ? Vérifiez vos résultats en résolvant le système sur $\mathbb{R}$ avec `Sage` : déclarer l'idéal I sous-jacent avec `ideal`, puis calculer la variété $V(I)$ avec `I.variety()` (en option le corps où l'on cherche les solutions).

   Attention, le résultant est considéré par défaut comme un polynôme multivarié. Il faut donc d'abord forcer le résultant à vivre dans $\mathbb{K}[x]$ pour utiliser la fonction `roots`.

3. Mêmes questions pour les deux courbes d'équations $x^4 + y^4 = 1$ et $x^5y^2 - 4x^3y^3 + x^2y^5 = 1$.

Exercice 3 (Implicitation à l'aide du résultant) Pour chaque courbe paramétrée suivante, déterminer une équation implicite et tracer la courbe:

1) (courbe mystère)
$$x(t) = (1 - t^2)/(1 + t^2), \qquad y(t) = 2t/(1 + t^2).$$

2) (folium de Descartes)
$$x(t) = 3t/(1 + t)^3, \qquad y(t) = 3t^2/(1 + t)^3.$$

3) (quadrifolium)
$$x(t) = \frac{4\left(t^2-1\right)^2 t}{\left(t^2+1\right)^3}, \qquad y(t) = \frac{8\left(1-t^2\right)t^2}{\left(t^2+1\right)^3}$$

2 Polynômes symétriques

Polynômes multivariés. L'anneau $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ se déclare par `R=PolynomialRing(QQ,'x',n)`. On déclare les variables par `x=R.gens()` et on accède à la variable x_i avec `x[i]`. On évalue $P(x_0, 3, x_2, x_2)$ avec `P.subs({x[1]:3,x[3]:x[2]})`.

Polynômes symétriques. On peut calculer les fonctions symétriques directement avec Sage :
`Sym = SymmetricFunctions(QQ)` : algèbre des polynômes symétriques
`e=Sym.elementary` : bases via les polynômes symétriques élémentaires (ou bien `s=Sym.powersum` pour la base en les sommes de puissances, cf l'aide de Sage pour les conversions)
`e[k].expand(n)` : renvoie $\sigma_k \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$.

Exercice 4 Ecrire une procédure `Sigma`(n) qui retourne la liste $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des polynômes symétriques élémentaires de $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$. On pourra utiliser les commandes ci-dessus. Sinon, construire directement les dites fonctions en s'aidant de `list(subsets([1..n]))`.

Exercice 5 Ecrire un programme qui teste si $P \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ est symétrique. Optimiser la procédure (*Indication:* faut-il tester l'invariance de P par toutes les permutations de variables ?).

Exercice 6 En vous appuyant sur le CM, écrire un programme qui étant donné $P \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ symétrique retourne l'unique polynôme Q tel que $P = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Tester avec $n = 5$ et $P = \sum_{i=0}^{4} x_i^2$.

3 Division, bases de Gröbner, implicitation

Exercice 7 (division multivariéé) Ecrire un programme qui, donnés $P, G_1, \ldots, G_r \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ muni d'un bon ordre monomial $\prec$, retourne une division multivariée de P par $G_1, \ldots, G_r$. Tester votre programme avec $n = 4$, $r = 2$ en considérant des polynômes aléatoires (et P de degré 5). Comparer avec Sage quand $r = 1$. Trouvez-vous le même résultat que Sage ? Expliquez.

Exercice 8 (Test base de Gröbner) En vous appuyant sur le théorème 8 du CM, écrire un programme qui teste si une famille de polynômes $(G_1, \ldots, G_r)$ est une base de Gröbner. Comparer avec Sage.

Exercice 9 (Résolution, quotient, idéaux éliminants)

1. Déterminer les solutions réelles puis rationnelles (dans $\mathbb{Q}$) du système d'équations
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 5 \\ xz = 1 \end{cases}$$
2. Montrer que la surface $x^2 + 2xz^3 - 3xz - y^2z + z^3 + z = 0$ contient les solutions du système.
3. Calculer les idéaux éliminants I_1 et I_2 de l'idéal I sous-jacent au système.
4. Déterminer une base monomiale de la $\mathbb{Q}$-algèbre quotient $\mathbb{Q}[x, y, z]/(I)$ (utiliser `I.normal_basis()`). Vérifier sur cet exemple la validité du théorème 7 de décomposition du quotient.
5. Réduire $g = xy + x^3$ modulo I (`g.reduce(I)`). Votre résultat est-il en accord avec le théorème de décomposition du quotient ? Comment résoudre ce problème ?

Exercice 10 (Influence de l'ordre monomial) Calculer une base de Gröbner de $I = \langle x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^2 + z^2 - 1\rangle$ selon les ordres lex et grevlex. Même question avec $J = \langle x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^3 + z^2 - 1\rangle$. Conclusion ?

Exercice 11 (Implicitation) Considérons la surface paramétrée suivante (surface tangente de la courbe cubique tordue):
$$\begin{cases} x = t + u \\ y = t^2 + 2tu \\ z = t^3 + 3t^2u \end{cases}$$

1. En vous aidant des bases de Gröbner, calculez l'équation implicite de la plus petite surface algébrique contenant cette surface paramétrée. Comparer avec la commande de Sage
2. Tracer la surface obtenue (utiliser `implicit_plot3d`)
3. Utiliser le théorème d'extension (une cordonnée à la fois !) pour montrer que la surface paramétrée coïncide la surface obtenue sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire est-ce que toute solution partielle en (x, y, z) sur $\mathbb{C}$ se relève en une solution en (t, u, x, y, z) sur $\mathbb{C}$? Vérifier à la main que cela reste vrai sur $\mathbb{R}$.
4. Reprendre les même questions avec les paramétrisations
$$\begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ z = 3u^2 - 3v^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u^2/v \\ y = v^2/u \\ z = u^3 \end{cases}$$
5. Calculer les équations de deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection forme la courbe spatiale paramétrée par (t^4, t^3, t^2). Tracer cette courbe paramétrée, puis tracer ces deux surfaces.