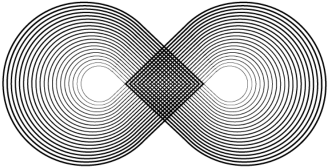
VERS L'INFINI ET AU-DELA



Martin Weimann (UPF)

Les jeudis du savoir

CRIOBE, Moorea, le 10 Mai 2018

VERS L'INFINI ET AU-DELA ?

L'infini c'est long, surtout vers la fin...

I. C'est quoi l'infini ?

II. Y a-t-il plusieurs infinis ?

III. Une conférence c'est long, surtout vers la fin...

I. D'abord, c'est quoi l'infini ?

La difficile naissance de la théorie des ensembles...

Une quantité plus grande que toute quantité finie

(Euclide)

L'infini a-t-il une réalité physique ?

Bon, en physique, c'est le bazar...

Et en mathématique ?

1. Quelques ensembles infinis

Les nombres entiers naturels

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$$

Chaque nombre a un successeur

L'ensemble des nombres entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

L'ensemble est infini

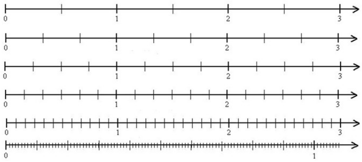
L'ensemble des nombres entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Chaque nombre a aussi un prédecesseur

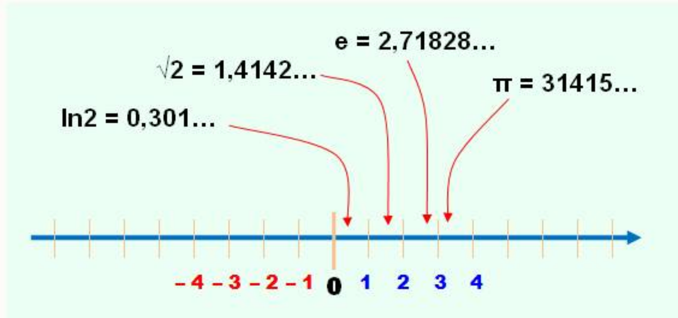
L'ensemble des nombres rationnels (les fractions)

$$\mathbb{Q} = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{2}{1}, \frac{13}{58}, \ldots \right\}$$

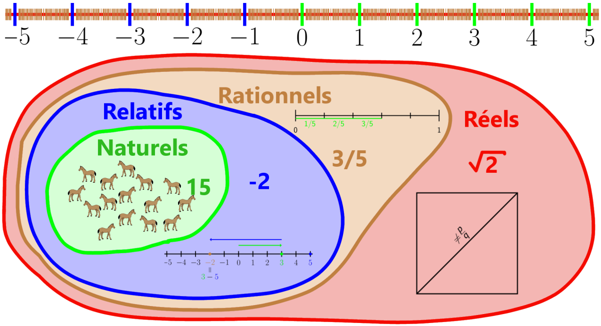


- Infinité de fractions entre deux fractions.
- Pas de prédecesseur ou successeur immédiat.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (nombres à virgule)



Représentent les points de la droite



Ces ensembles sont inclus l'un dans l'autre.

Mais sont-ils "plus gros" l'un que l'autre ?

2. Le paradoxe de la réflexivité

Que signifie "autant que" ?

Intuition : On compte et on compare.

A = 

B = 

Les ensembles A et B ont 5 éléments : ils ont **autant** d'éléments.

Mais peut-on comparer A et B sans compter ?

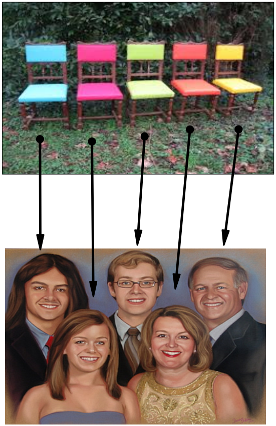
L'astuce

Etablir une correspondance parfaite entre les ensembles A et B :

- à chaque élément de A, on associe un élément de B
- chaque élément de B est atteint une et une seule fois

On appelle cela **une bijection**.

$A =$



$B =$

On compare sans compter !

Naissance de la théorie des ensembles

Définition fondamentale (Cantor): On dit que deux ensembles A et B ont *autant d'eléments* s'il existe une *bijection* $A \to B$.

UNE CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

MÉMOIRE DE

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Extrait du Journal de Borchardt, vol. 84.)

Si on peut faire correspondre élément par élément deux *ensembles* bien définies M et N par une opération à sens unique (et, quand on peut le faire d'une manière, on peut le faire aussi de beaucoup d'autres), convenons, pour la suite, de nous exprimer en disant que ces *ensembles* ont la même *puissance*, ou encore qu'elles sont *équivalentes*.

Nous appellerons *parties intégrantes* d'un *ensemble* toutes les autres *ensembles* M', dont les éléments sont en même temps éléments de M.

Si deux *ensembles* M et N ne sont pas de même *puissance*, ou bien M aura la même *puissance* qu'une partie intégrante de N, ou bien N la même qu'une partie intégrante de M; dans le premier cas nous appelons la *puissance* de M plus petite, dans le second nous l'appelons plus grande que la *puissance* de N.

Georg Cantor
(1845-1918)

Mais alors !!

Si j'enlève 0 de l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

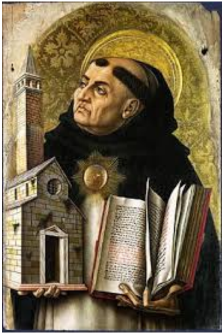
il existe une bijection

$$\begin{array}{rcccccccc} A = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ B = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

... donc il y a autant d'éléments !

J’en enlève et il en reste autant !

Et c'est le drame...



St Thomas d'Aquin (1250):

"Quiconque ose penser l'infini se met en concurrence avec la nature unique et infinie de Dieu"

Non mais alors !

Un mathématicien sans peur ose...

Définition (Dedekind, 1870): Un ensemble est infini si je peux enlever un élément et qu'il en reste autant.

Il est (enfin) possible d'étudier l'infini...

II. Y a-t-il plusieurs infinis ?

La révolution de Cantor

Entiers *vs* entiers pairs

Exercice 1 : Y a-t-il autant de nombres entiers que de nombres pairs ?

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Autrement dit : si j'en enlève un sur deux, en reste-t-il autant ?

Réponse: OUI.

Une bijection existe :

$$\begin{array}{lcccccccc} A = & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ B = & & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

Entiers *vs* entiers relatifs

Exercice 2 : Y a-t-il autant d'entiers naturels que d'entiers relatifs :

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \stackrel{?}{\longleftrightarrow} \quad \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Si j'en ajoute autant, est-ce que j'en ai autant ?

Réponse: OUI.

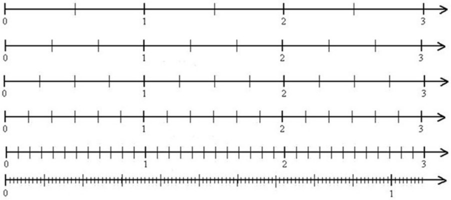
Une bijection existe :

$$\begin{array}{cccccccccc} A & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ B & = & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

Entiers *vs* fractions

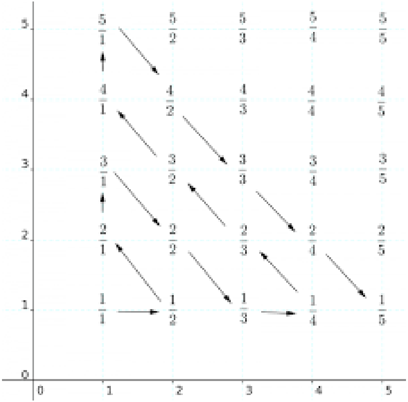
Exercice 3 : Y a-t-il autant d'entiers que de fractions ?

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{19}{123}, \ldots \right\}$$



Plus dur...

Réponse : OUI.



Une bijection existe.

Entiers *vs* réels

Exercice 4 : Y a-t-il autant d'entiers que de nombres à virgule ?

Autrement dit : peut-on énumérer tous les points de la droite ?

Réponse : NON !

Bijection **impossible** (diagonale de Cantor, 1874):

X1	=	0,	0	6	8	7	2	0	1	5	8	...
X2	=	0,	5	4	3	4	3	5	7	8	2	...
X3	=	0,	3	5	2	3	2	7	8	5	5	...
X4	=	0,	8	0	0	2	7	3	4	3	7	...
X5	=	0,	7	5	1	2	5	2	6	3	6	...
X6	=	0,	7	4	4	8	6	4	3	7	2	...
X7	=	0,	3	7	4	3	0	0	6	3	6	...
X8	=	0,	0	0	3	0	6	6	4	2	0	...
X9	=	0,	7	3	0	8	2	2	0	6	6	...
Y	=	0,	1	5	3	3	6	5	7	3	7	...

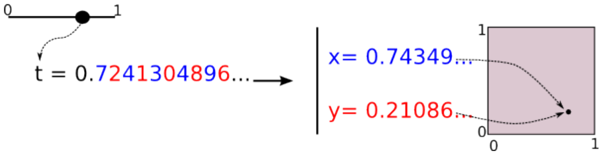
Un deuxième infini

Infini dénombrable $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}) <$ **Infini continu** $(\mathbb{R})$

Y'aurait-y pas encore un p'tit infini...

Droite *vs* plan

Lettre de Cantor à Dedekind : "J'ai prouvé qu'il y a autant de points sur la droite que dans le plan. Je le vois, mais ne le crois pas ! "

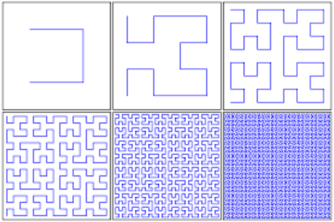


Les infinis de la droite, du plan et de l'espace sont les même !

Petite digression

- Mais peut-on recouvrir le carré sans déchirer le segment ?

  Oui ! Par exemple, avec la **courbe fractale de Peano**.



- Et sans passer deux fois par le même point ?

  Non ! Pas de bijection continue entre espaces de dimensions différentes.

OUUUF !!

Alors ? Pas d'infini plus gros que le continu ?

(l'orateur sonde le public)

Le théorème (magnifique) de Cantor

L'ensemble $P(A)$ des parties de A est plus gros que A.

La conséquence (magnifique) du théorème de Cantor

Il existe une infinité d'infinis !

$$\mathbb{N} < P(\mathbb{N}) < P(P(\mathbb{N})) < P(P(P(\mathbb{N}))) < \cdots$$

Et oui, c'est comme ça...

La preuve (magnifique) de Cantor

Preuve par l'absurde : Supposons que A et $P(A)$ ont même taille. Donc il existe une bijection $f : A \to P(A)$. Considérons alors la partie

$$X = \{x \in A \,|\, x \notin f(x)\}.$$

Comme f supposée bijective, il existe $x \in A$ tel que $X = f(x)$.

1. Si $x \in X$, alors $x \notin f(x)$, donc $x \notin X$. **Absurde.**
2. Si $x \notin X$, alors $x \notin f(x)$, donc $x \in X$. **Absurde.**

Contradiction ! Hypothèse de départ fausse donc $P(A)$ plus gros que A.

III. Une conférence c'est long, surtout vers la fin...

Rêves et désillusions

1. Le fini a-t-il besoin de l'infini ?

Algébrique *vs* Transcendant

On distingue

deux familles

de nombres réels

- Nombres **algébriques**: racines de polynômes entiers.
  - $1/3 = 0.3333\cdots$ est algébrique (solution de $3X - 1 = 0$)
  - $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ est algébrique (solution de $X^2 - 2 = 0$)

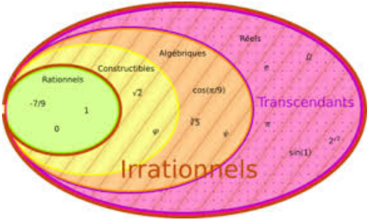
- Nombres **transcendants**: les autres.
  - $e = 2.7182\cdots$ est transcendant (Hermite, 1873)
  - $\pi = 3.1415\cdots$ est transcendant (Lindemann, 1882).

The question :

Y a-t-il une infinité de nombres transcendants ?

The réponse (Cantor, 1875):

Il en existe une infinité non dénombrable !



- **Première preuve "d'existence pure", non constructive.**

Et c'est encore le drame...

- Krönecker s'insurge: *"Ce ne sont plus des maths, c'est de la théologie !"*
- Hilbert répond: *"Plus personne ne nous délogera du paradis que Cantor à créé pour nous !"*

Début de la **crise des fondements**. Deux visions s'opposent:

- Mathématiques constructivistes, **finitistes**

  $\Longrightarrow$ Informatique.

- Mathématiques formelles, **infinitistes**

  $\Longrightarrow$ Maths modernes.

Cantor aussi répond à Krönecker

"L'essence des mathématiques réside dans leur liberté"

Finitiste or not finitiste ?

Exemple 1: *Un polygones à n côtés a $n(n-3)/2$ diagonales.*

- Preuve **finitiste** : de chaque sommet part $n-3$ diagonales et chaque diagonale est comptée deux fois.

Exemple 2: *La proportion de nombres premiers plus petits que n est environ* $1/\log(n)$.

- Preuve **infinitiste** (analyse) en 1896 par Hadamard et de la Vallée-Poussin.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^{-1}, \qquad \text{puis}$$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}, m \geq 1, p^m < x} \log(p) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

- Preuve **finitiste** (arithmétique) en 1949 par Erdös et Selberg.

Toute propriété finie admet-elle une preuve finitiste ?

NON.

(Gödel-1931, Türing-1937)

Premier exemple "concret" (Kirby-Paris, 1982): On ne peut pas démontrer que la suite de Goodstein converge sans utiliser les nombres infinis de Cantor.

Infinististes vs Finitistes

2. Le cauchemar de Cantor

L'hypothèse du continu

Hypothèse du continu (Cantor, 1880) : Il n'y a pas d'infini coincé entre le dénombrable et le continu:

$$\mathbb{N} \quad < \quad ? \quad < \quad \mathbb{R}$$

- Premier problème sur la fameuse liste de Hilbert (1900).
- Cantor cherchera toute sa vie, sans trouver. Il finira sa vie à l'asile.

Krönecker (directeur de thèse de Cantor):

"Naturellement ! C'est à l'asile qu'il aurait dû être depuis le début".

Sympa...

Gloups...

Théorème (Gödel-1932, Cohen-1963) :

L'hypothèse du continu n'est ***pas démontrable****.*

Si Cantor avait su...

Infinitistes vs Finitistes

Que signifie "démontrable" ?

Mathématiques = ensemble de **théorèmes** déduits d'une liste d'**axiomes**.

 $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ 

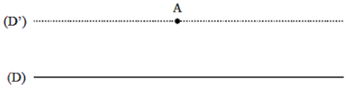
- **Axiome** = propriété **admise** (qu'on a le droit d'utiliser)
- **Théorème** = propriété **démontrée** (que l'on peut construire ou déduire)

Théorème de Cohen : *on ne peut pas déduire l'hypothèse du continu des axiomes de l'arithmétique et de la théorie des ensembles.*

Un exemple intuitif: l'axiome des parallèles

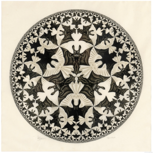
Euclide propose 5 axiomes pour définir la géométrie du plan:

1. Par deux points passe une droite.
2. On peut prolonger indéfiniment cette droite.
3. Un point et une longueur définissent un cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. **Par tout point passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.**



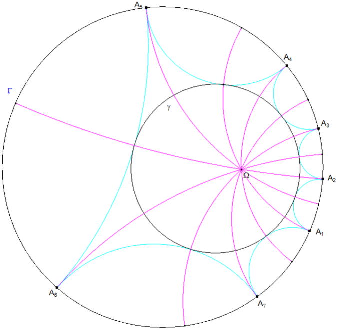
Question : Le 5ème axiome est-il démontrable ?

Une nouvelle géométrie



Le 5ème axiome est un axiome
(Géométrie hyperbolique, Lobatchevski-Poincaré, 1902).

1. Par deux points passe une droite.
2. On peut prolonger indéfiniment cette droite.
3. Un point et une longueur définissent un cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. **Par tout point passe une infinité de droites parallèles à une droite donnée.**



3. Le rêve de Hilbert. No paradoxes !

Le paradoxe de Cantor

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Et oui, c'est comme ça...

Le paradoxe du menteur

"JE MENS"

Le rêve...

Programme de Hilbert (Paris, 1900):

Ni paradoxes, ni indécidables !

Hilbert veut **un système d'axiomes** qui soit :

- **Cohérent** : Un énoncé ne peut être **vrai et faux** (pas de paradoxes)
- **Complet** : Un énoncé doit être **vrai ou faux** (pas d'indécidables)

C'est l'ère de la logique, des algorithmes et de la machine de Türing.

La désillusion

- **Premier Théorème d'incomplétude (Gödel, 1932):**

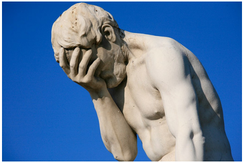
  Il n'existe pas de système d'axiomes cohérent et complet.

Il existera toujours des énoncés indémontrables dans un système d'axiomes cohérent donné

Mais il y a bien pire !

- **Second Théorème d'incomplétude (Gödel, 1932):**

  Un système d'axiomes ne peut pas prouver sa propre cohérence.



Match nul...