Trace et calcul résiduel : une nouvelle version du théorème d'Abel inverse, formes abéliennes

Martin Weimann
Laboratoire analyse et géométrie de l'Université Bordeaux1
351, cours de la Libération, 33045 TALENCE
Martin.Weimann@math.u-bordeaux.fr

5 Mars 2005

Résumé : on utilise le calcul résiduel pour un calcul effectif de la trace d'une forme méromorphe sur une hypersurface analytique permettant d'obtenir une caractérisation des formes traces. En conséquence, une version plus forte du théorème d'Abel-inverse global que celle donnée dans [16] est prouvée : le courant $[V] \wedge \Phi$ est algébrique si et seulement si sa transformée d'Abel $\mathcal{A}([V] \wedge \Phi)$ est rationnelle en les variables ne correspondant pas à la pente. La preuve s'appuie sur des mécanismes algébriques d'inversion et sur une équation différentielle de type "onde de choc" vérifiée par les coefficients de la trace. Le théorème de Wood [18] donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une collection de germes d'hypersurfaces soit incluse dans une hypersurface algébrique. On établit le lien logique de cet énoncé avec le théorème d'Abel-inverse. Enfin, on obtient une nouvelle méthode pour calculer la dimension de l'espace des n-formes abéliennes sur une hypersurface de $\mathbb{P}^{n+1}$ (voir [15]).

Abstract : we use residue calculus for an effective computation of the trace of a meromorphic form Φ on an analytic hypersurface V and we obtain an algebraic characterization of trace-forms. We prove by this way a stronger version of the global Abel-inverse theorem than in [16] : the current $[V] \wedge \Phi$ is algebraic if and only if its Abel-transform $\mathcal{A}(\Phi \wedge [V])$ is a rational form in variables not corresponding to the hillside. The proof uses an algebraic mechanism of inversion and a differential equation of a "shock wave" type satisfied by trace's coefficients. We show the link of this theorem with Wood's theorem [18], giving a simple criterion for a family of germs of analytic hypersurfaces to be interpolated by an algebraic hypersurface. Furthermore, we obtain a new method to calculate the dimension of the vector space of maximal abelian forms on an algebraic projective hypersurface [15].

1 Introduction

Soit X une variété analytique complexe de dimension $n+1$ de faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On note Ω_X^q (resp. M_X^q) le faisceau des $(q,0)$-formes holomorphes (resp. méromorphes) sur X.
Pour tout ouvert U de X, on note $C_{(r,s)}^{\infty,c}(U)$ l'espace des formes-test $\mathcal{C}^\infty$ de

bidegré (r,s) à support compact dans U. Le courant d'intégration associé à un sous-ensemble analytique fermé V de U de dimension k, est un courant noté $[V]$, supporté par V, positif, fermé, de bidegré $(n+1-k, n+1-k)$, qui agit sur $C^{\infty,c}_{(k,k)}(U)$ par intégration sur la partie régulière de V.

Une q-forme méromorphe Φ de U définit une forme méromorphe sur V si son lieu polaire $\mathrm{pol}\,(\Phi)$ intersecte V proprement. On note M^q_V le faisceau sur V correspondant. Le courant

$$T : \theta \mapsto \int_{V \setminus V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi)} \Phi \wedge \theta$$

est naturellement défini sur $C^{\infty,c}_{(k-q,k)}(U \setminus V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi))$. Si g est une fonction holomorphe dans U qui vérifie $V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi) \subset \{g = 0\}$ avec de plus $\dim(\{g = 0\} \cap V) < \dim V$, il est montré dans [16] que le courant

$$\theta \mapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(V \setminus V \cap \mathrm{pol}\,(\Phi)) \cap \{|g| > \epsilon\}} \Phi \wedge \theta$$

existe et prolonge T à U indépendamment de g en un courant $[V] \wedge \Phi$ supporté par V. On dit que Φ est régulière ou abélienne en $p \in V$ si ce courant est $\bar{\partial}$-fermé en p et on note ω^q_V le faisceau sur V correspondant [16]. Une forme régulière sur V est en un point singulier p de V restriction à V d'un germe de forme méromorphe Φ en p qui peut ne pas être holomorphe en p : les singularités de V compensent dans certains cas les pôles de Φ (si V est lisse, on a $\omega^q_V = \Omega^q_V$) ([2, 16]).

On note $\mathbb{P}^{n+1}$ l'espace projectif complexe de dimension $n+1$. Un ouvert U de $\mathbb{P}^{n+1}$ est dit 1-concave si par chacun de ses points passe une droite incluse dans U. Dans ce cas, le dual U^* est un ouvert non vide de la grassmannienne $\mathbb{G}(1, n+1)$ constitué des droites incluses dans U et on peut définir la variété d'incidence au-dessus de U

$$I_U := \{(z, L) \in U \times U^* \; ; \; z \in L\},$$

munie des projections naturelles p_U et q_U sur U et U^*. Puisque p_U est une submersion et q_U est propre (la propreté de q_U, cruciale ici, est liée à la compacité de l'espace projectif), on peut définir pour tout sous-ensemble analytique fermé V de U et toute q-forme méromorphe Φ sur V le courant sur U^*

$$\mathcal{A}(\Phi \wedge [V]) := q_{U*}(p_U^*(\Phi \wedge [V])),$$

que l'on appelle la *transformée d'Abel-Radon* de $\Phi \wedge [V]$.

Si V est de codimension 1, une droite L_0 générique coupe V transversalement en d points distincts $p_1(L_0), \ldots, p_d(L_0)$ (ces derniers sont en nombre fini localement constant, grâce à la compacité de l'espace projectif) tels que les applications $L \mapsto p_j(L)$ sont holomorphes au voisinage de L_0 et on a l'égalité

$$\mathcal{A}(\Phi \wedge [V])(L) = \sum_{j=1}^{d} p_j^*(\Phi)(L).$$

Par le théorème d'Abel généralisé [16], ce courant est une q-forme méromorphe sur U^*, que l'on appellera *la trace de* Φ *sur* V, notée $\mathrm{Tr}_V(\Phi)$ [1].

Soit $(X_1 : X_2 : \cdots : X_n : Y : Z)$ un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^{n+1}$ pour lequel la droite $L_0 := \{X_1 = \cdots = X_n = 0\}$ est incluse dans U et coupe V transversalement en une collection finie de points n'appartenant pas à l'hyperplan à l'infini $Z = 0$. On peut dans ce cas utiliser les coordonnées affines $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y) := (\frac{X_1}{Z}, \ldots, \frac{X_n}{Z}, \frac{Y}{Z})$ au voisinage de $V \cap L_0$. Toute droite voisine de L_0 est définie par l'annulation des fonctions affines

$$l_i(x, y, a, b) := x_i - a_i y - b_i\,,\ i = 1, \ldots, n.$$

On note $(a, b) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ les coordonnées dans l'ouvert dual U^* et $L_{(a,b)}$ la droite projective correspondante.

On rappelle dans la section 2 certains outils de la théorie des résidus : courants résiduels, résidus de Grothendieck, théorème de dualité. L'équation de Lelong-Poincaré, liant courant d'intégration et courant résiduel permet d'obtenir une formule résiduelle pour la trace qui motive l'utilisation du théorème de dualité pour les problèmes d'inversion.

Dans la section 3, on caractérise les germes de n-formes méromorphes en $L_0 \in \mathbb{G}(1, n+1)$ qui sont la trace d'un germe de n-forme méromorphe Φ sur une collection (encore notée V) de germes d'hypersurfaces analytiques le long de la droite L_0. On se ramène pour cela au cadre polynômial pour tester le théorème de dualité sur un nombre fini de fonctions-tests. On montre que la donnée du couple (V, Φ) équivaut à la donnée d'un couple de polynômes (F, H) à une variable de degrés respectifs d et $d-1$, à coefficients dans le corps des germes de fonctions méromorphes en $(a, b) = (0, 0) \in \mathbb{G}(1, n+1)$, vérifiant une équation différentielle du type *onde de choc*. Les coefficients des polynômes F et H sont uniquement déterminés par un système linéaire non dégénéré dont les coefficients sont des sommes complètes de résidus. Cette équivalence donne deux résultats importants. D'une part, le couple (F, H) caractérise uniquement le couple (V, Φ) en terme des traces $\mathrm{Tr}_V(y^k)$ et $\mathrm{Tr}_V(y^k\Phi)$, pour $k = 0, \ldots, 2d-1$ (où $d := \mathrm{Tr}_V 1$), *calculées suivant une famille de droites de même direction*[2], d'autre part on obtient une formule résiduelle algébrique de la trace de Φ sur V qui caractérise les germes de traces. Les coefficients s'obtiennent par des calculs de résidus de fonctions rationnelles d'une variable, c'est-à-dire un calcul de reste dans une division euclidienne (cette approche se trouvait déjà esquissée dans l'article de P.A. Griffiths [11]).

La section 4 est consacrée aux applications de ces résultats. Le théorème d'Abel-inverse, prouvé par Henkin et Passare (1999, [16]), stipule dans sa version globale

[1] en général la trace d'un courant désigne son image directe par une application propre sur son support. La trace de Φ sur V correspond ici à l'image directe *via* q_U du courant $p_U^*(\Phi \wedge [V])$ sur U^*.

[2] En restreignant à une seule projection, on retombe sur le concept de trace usuel originellement développé par Barlet [2].

qu'il faut et il suffit que la trace de Φ sur V soit rationnelle pour que V soit incluse dans une hypersurface algébrique $\widetilde{V}$ (de degré $d = \mathrm{Tr}_V 1$) et que Φ se prolonge en une forme rationnelle sur $\widetilde{V}$. Ce résultat est prouvé par Griffiths dans le cas de la trace nulle dans [11], auquel cas la forme Φ se prolonge en une forme abélienne sur $\widetilde{V}$. On dégage les mécanismes mis en jeu dans les problèmes d'inversion et on montre que la rationalité de la trace en $b = (b_1, \ldots, b_n)$ pour tout a voisin de 0 suffit pour aboutir aux mêmes conclusions. On montre ensuite le lien avec le théorème de Wood [18] qui affirme qu'il est équivalent que V soit algébrique de degré d et que la trace de y soit affine en b. On prouve que la rationalité en b de la trace d'une n-forme méromorphe quelconque implique que la trace de y est affine en b. Pour finir, la caractérisation résiduelle des formes traces permet de retrouver la dimension de l'espace ω_V^n des n-formes abéliennes (*i.e.* de trace nulle) sur une hypersurface algébrique V (voir [15] pour une preuve *via* les tissus).

La majorité des démonstrations et des mécanismes mis en oeuvre s'appuient uniquement sur des calculs de résidus de polynômes, c'est-à-dire des restes de divisions euclidiennes dans l'anneau des polynômes. En ce sens, on peut parler de l'aspect algébrique du théorème d'Abel et de son inversion, et plus généralement du concept de trace. Les résultats présentés dans cette première partie s'inspirent des travaux d'Alain Yger [19], [3]. Des idées similaires ont été développées récemment et indépendamment par Bruno Fabre dans le cas plus général des courants localement résiduels [10].

2 Généralités

2.1 Calcul résiduel

On garde les notations précédentes. Soit U un ouvert de X et $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Le courant valeur principale $[\frac{1}{f}]$ agit sur $\psi \in C^{\infty,c}_{(n+1,n+1)}(U)$ par :

$$< \Big[\frac{1}{f}\Big], \psi >:= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|f|>\epsilon} \frac{\psi}{f}.$$

Par le théorème de Stokes, le courant résiduel $\bar{\partial}\Big[\frac{1}{f}\Big]$ agit sur $\psi \in C^{\infty,c}_{(n+1,n)}(U)$ par :

$$< \bar{\partial}\Big[\frac{1}{f}\Big], \psi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|f|=\epsilon} \frac{\psi}{f}.$$

Plus généralement, si $f_1, ..., f_k$ est une suite quasi-regulière de l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ (ce qui équivaut à l'exactitude du complexe de Koszul associé, sauf éventuellement au degré 0, ou encore au fait que $f_1, ..., f_k$ définisse une intersection complète dans U, [3]), on peut définir (voir par exemple [17]) le courant résiduel de Coleff-Herrera

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} \cdot \\ f_1, \ldots, f_k \end{bmatrix} := \frac{1}{(2i\pi)^k} \bar{\partial}\Big[\frac{1}{f_1}\Big] \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\Big[\frac{1}{f_k}\Big],$$

où l'on utilise ici les notations standard. Ce courant est $\bar\partial$-fermé, supporté par $V := \{f_1 = \cdots = f_k = 0\}$ et nul sur les formes-test à coefficients anti-holomorphes. Il est lié au courant d'intégration $[V]$ par la formule de Lelong-Poincaré

$$[V] = \frac{1}{(2i\pi)^k}\bar\partial\Big[\frac{1}{f_1}\Big] \wedge \cdots \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f_k}\Big] \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k.$$

Un outil majeur du calcul résiduel est le théorème de dualité : si U est un domaine d'holomorphie et $g, f_1, \ldots, f_k$ une suite quasi-régulière dans $\mathcal{O}_X(U)$, alors $h \in \mathcal{O}_X(U)$ est dans l'idéal $(f_1, \ldots, f_k)$ si et seulement si le courant

$$h\Big[\frac{1}{g}\Big]\bar\partial\Big[\frac{1}{f_1}\Big] \wedge \cdots \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f_k}\Big]$$

est nul sur les formes-test $\overline{\partial}$-fermées au voisinage de V. Ce théorème s'applique notamment dans les anneaux locaux des germes de fonctions holomorphes. Le pendant algébrique de ce résultat dans le cadre élémentaire du calcul résiduel en une variable est une conséquence de l'algorithme de division euclidienne : si $F \in \mathbb{C}[Y]$, alors $H \in \mathbb{C}[Y]$ est divisible par F si et seulement si

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} Y^k\, H\, dY \\ F \end{bmatrix} = 0\,, \qquad \forall k = 0, \ldots, \deg F - 1\,.$$

Soit $p \in X$ et $f_1, \ldots, f_{n+1}$ une suite régulière dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,p}$ des germes de fonctions holomorphes en p. Pour tout $h \in \mathcal{O}_{X,p}$, on appelle résidu ponctuel ([12], Chapitre 6) en p de la $(n+1)$-forme méromorphe $\omega = \frac{hdx\wedge dy}{f_1\cdots f_{n+1}}$ le complexe

$$\operatorname{res}_p(\omega) := \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}}\int_{|f_1|=\epsilon_1,\ldots,|f_{n+1}|=\epsilon_{n+1}} \frac{hdx\wedge dy}{f_1\cdots f_{n+1}}$$

(ce nombre ne dépend pas de $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n+1})$ pour les ϵ_j suffisamment petits par le théorème de Stokes). Plus généralement, si $h \in \mathcal{O}_X(U)$ et $f_1, \ldots, f_{n+1}$ est une suite quasi-régulière dans l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ ayant pour zéros en commun $p_1, \ldots, p_r$, le résidu global de la $(n+1)$-forme méromorphe $\omega := \frac{hdx\wedge dy}{f_1\cdots f_{n+1}}$ dans U est le complexe $\sum_{i=1}^r \operatorname{res}_{p_i}\omega$. Résidus ponctuels et courants résiduels sont liés par l'égalité :

$$\sum_{i=1}^r \operatorname{res}_{p_i}\omega = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} hdx\wedge dy \\ f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\end{bmatrix}.$$

2.2 Lien avec la trace

On suppose maintenant $X = \mathbb{P}^{n+1}$ et on garde les notations de l'introduction. Soit $U \subset \mathbb{P}^{n+1}$ un ouvert linéairement concave contenant la droite $L_0 := \{x_1 = \cdots = x_n = 0\}$, V une hypersurface analytique de U d'intersection propre avec L_0 et Φ une q-forme méromorphe sur V. On note $[I_U]$ le courant d'intégration sur $U \times U^*$ associé à la variété d'incidence I_U. On peut expliciter dans des cartes affines de la grassmannienne les coefficients de la q-forme méromorphe

$$\mathrm{Tr}_V \Phi := q_{U*}(p_U^*([V] \wedge \Phi)).$$

Pour toute forme-test $\varphi \in C^{\infty,c}_{(2n-q,2n)}(U^*)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Tr}_V\,(\Phi)\,,\,\varphi\rangle &= \int_{U^*} \mathrm{Tr}_V(\Phi)(a,b) \wedge \varphi(a,b) \\
&= \int_{\mathrm{I}_U} ([p_U^{-1}(V)(a,b)] \wedge p_U^*[\Phi]) \wedge q_U{}^*(\varphi)(x,y,a,b) \\
&= \int_{U\times U^*} ([V](x,y) \wedge [I_U](x,y,a,b)) \wedge \Phi(x,y) \wedge \varphi(a,b)
\end{aligned}$$

Le courant $T := [V(x,y)] \wedge [I_U(x,y,a,b)] \wedge \Phi(x,y)$ est un $(q+n+1, n+1)$-courant sur $U \times U^*$ d'image directe $q_{U*}T = \mathrm{Tr}_V \Phi$. On note $\{f(x,y) = 0\}$ l'équation de V au voisinage de $V \cap L_0$ (f est holomorphe au voisinage de $V \cap L_{(a,b)}$ pour (a,b) proches de $(0,0) \in U^*$). La formule de Lelong-Poincaré donne au voisinage de $(0,0) \in U^*$ l'expression locale de T

$$T = \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} \Phi \wedge df \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} d_{(x,y,a,b)} l_i \Big) \wedge \bar\partial \Big[\frac{1}{f}\Big] \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \bar\partial_{(x,y,a,b)} \Big[\frac{1}{l_i}\Big]\Big).$$

Ces calculs se généralisent naturellement pour les intersections complètes de codimension plus grande que 1. Examinons deux cas particuliers.

1. Φ *est une fonction sur* V

On suppose que $\Phi = \big(\frac{h}{g}\big)_{|V}$ est une 0-forme méromorphe sur V où h et g sont holomorphes au voisinage de V, avec $\dim(V \cap \{g = 0\}) < \dim V$ et de plus $V \cap \{g=0\} \cap L_0 = \emptyset$. Le courant $\mathrm{Tr}_V \Phi$ agit sur des formes-tests de U^* de degré maximal, d'où l'égalité

$$\langle \mathrm{Tr}_V \Phi, \varphi \rangle = \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} \int_{U\times U^*} \Big[\frac{h}{g}\Big] \wedge \bar\partial\Big[\frac{1}{f}\Big] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bar\partial_{(x,y)} \Big[\frac{1}{l_i}\Big] \wedge df \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} d_{(x,y)} l_i \Big) \wedge q_U^* \varphi.$$

Par le théorème de Fubini, puis par dualité, l'expression de la trace de Φ au voisinage de $(0,0) \in U^*$ devient

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \Big\langle \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} \Big[\frac{1}{g}\Big] \bar\partial \Big[\frac{1}{f}\Big] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bar\partial_{(x,y)} \Big[\frac{1}{l_i}\Big]\,,\, h\, J(f,l) dx \wedge dy \Big\rangle$$

où $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ et $J(f,l) := \sum_1^n a_i \partial_{x_i} f + \partial_y f$ désigne le jacobien de l'application $(x,y) \mapsto (f, l_1, \ldots, l_n)(x,y)$. Pour (a,b) voisins de $(0,0) \in U^*$, les fonctions holomorphes $(f, l_1, \ldots, l_n)$ définissent un ensemble fini de points $\{p_1(a,b), \ldots, p_d(a,b)\}$ dépendant holomorphiquement des paramètres (a,b) qui ne rencontre pas l'ensemble $\{g = 0\}$; pour de tels (a,b), la trace de $\frac{h}{g}$ sur

V coïncide avec le résidu global de Grothendieck dans U de la $(n+1)$-forme méromorphe

$$\omega_{(a,b)} := \frac{\frac{h}{g} J(f,l) dx \wedge dy}{f l_1 \cdots l_n}.$$

Seules les équations de V au voisinage des $p_i(a,b)$ interviennent dans le calcul des résidus ponctuels, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Tr}_V \Phi = \mathrm{Res} \begin{bmatrix} \frac{h}{g} J(f,l) dx \wedge dy \\ f, l_1, \ldots, l_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

pour tout (a,b) voisins de $(0,0)$.

2. Φ *est une forme méromorphe de degré maximal sur* V

Puisque V ne contient pas la droite verticale $x=0$, la fonction $\partial_y f$ n'est pas identiquement nulle sur V, ce qui permet de supposer $\Phi = m(x,y)dx$ pour une fonction m méromorphe sur V. Dans ce cas, on fait ici agir le courant T sur des formes-test de $U \times U^*$ de bidegré $(n, 2n)$ en les variables (a,b) et on a

$$\mathrm{Tr}_V\,(\Phi) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res} \begin{bmatrix} m\, y^k\, \partial_y f\, dx \wedge dy \\ f, l_1, \ldots, l_n \end{bmatrix} \Big(\sum_{|I|=k\,,\,|J|=n-k\,,\,I\cap J=\emptyset} \pm da_I \wedge db_J \Big) \tag{2}$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $J = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ sont des multi-indices ordonnés de $\{1, \ldots, n\}$, $|I|$, $|J|$ leurs cardinaux et $da_I \wedge db_J := \wedge_{l=1}^{k} da_{i_l} \wedge_{l'=1}^{n-k} db_{j_{l'}}$.

Remarque 1 On retrouve une formule prouvée par P.A. Griffiths dans [11].

3 Caractérisation résiduelle des formes traces

On note $\mathcal{O}$ l'anneau factoriel (resp. $\mathcal{M}$ le corps) des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) à l'origine $(a,b) = (0,0)$ de $\mathbb{C}^{2n}$ et $L_0 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ la droite projective correspondante.

Définition 1 *On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des cycles effectifs (combinaisons formelles finies à coefficients entiers positifs) de germes d'hypersurfaces analytiques γ irréductibles le long de $L_0 \cap \{Z \neq 0\}$ (i.e en différents points $P = (0, y_P) \in L_0 \cap \mathbb{C}^{n+1}$), avec $\dim(\gamma \cap L_0) = 0$. Tout élément $V \in \mathcal{V}$ admet une décomposition unique $V = \sum_{P \in L_0} V_P$ où $V_P = \sum_i k_{i,P} V_{P,i}$ est une combinaison $\mathbb{N}$-linéaire de germes d'hypersurfaces analytiques irréductibles distincts en P. On note $|V|$ le support du cycle V et $\mathcal{V}_{\mathrm{red}} \subset \mathcal{V}$ le sous-ensemble des cycles réduits, pour lesquels $k_{i,P} \in \{0,1\}$ pour tout i et tout P.*

Définition 2 *Pour $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ on note $\mathbb{C}(V)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur V et $M^q(V)$, $q \in \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des $(q,0)$-formes méromorphes sur V.*

Soit $V \in \mathcal{V}$ un germe irréductible en un point $P = (0, y_P)$ de L_0. Dans ce cas, $V = \{f = 0\}$ où $f \in \mathbb{C}\{x, y - y_P\}$ est un germe de fonction holomorphe irréductible en P. Puisque $\dim(V \cap L_0) = 0$, la fonction $y \mapsto f(0, y)$ n'est pas identiquement nulle. Son ordre d'annulation d en $y = y_P$ est par continuité, le nombre de zéros voisins de y_P de la fonction holomorphe $y \mapsto f(x, y)$ pour x voisin de zéro. On appelle $d := \deg(V)$ le *degré* de V, notion que l'on étend naturellement à $\mathcal{V}$ par linéarité. L'ensemble $\mathcal{V}$ est ainsi muni d'une structure de semi-groupe gradué (on rajoute l'ensemble vide de degré 0 pour avoir un élément neutre). On suppose que l'équation $\{f = 0\}$ d'un germe V prend en compte les multiplicités de chacune des branches de V.

Remarque 2 Si $V \in \mathcal{V}_{red}$, l'entier d est le degré du revêtement analytique (V, π, I) où I est un ouvert suffisamment petit de $\mathbb{C}^{n+1}$ centré en $x = 0$ et π est la projection verticale $(x, y) \mapsto x$. Si $V = \{f = 0\}$ où f est un polynôme, d ne coïncide *a priori* pas avec le degré de f : le degré du germe en 0 de l'ensemble $V = \{y^2 - x^3 = 0\}$ est 2 alors que le degré de f est 3 (correspondant ici au degré de la projection $(x, y) \mapsto y$).

Ce paragraphe a pour but, d'une part de caractériser les éléments de $\mathcal{V}$ en termes de traces de monômes (Théorème 1), d'autre part de donner une caractérisation résiduelle des germes de n-formes méromorphes en $(0, 0) \in \mathbb{G}(1, n+1)$ qui sont la trace de germes de n-formes méromorphes sur un cycle réduit V (Théorème 2).

3.1 Construction du polynôme F

Soit $V = \{f = 0\} \in \mathcal{V}$ un germe irréductible en $P \in L_0$, de degré d et $\widetilde{f}(y, a, b) = f(ay + b, y) \in \mathcal{O}\{y - y_P\}$. La fonction $\widetilde{f}$ est irréductible et régulière de degré d en $y - y_P$. Par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un unique polynôme unitaire irréductible $Q \in \mathcal{O}[Y]$ de degré d et $u \in \mathcal{O}\{y - y_p\}$ inversible tels que :

$$\widetilde{f}(y, a, b) = Q(y, a, b)u(y, a, b)$$

avec $Q(y, 0, 0) = (y - y_P)^d$ et $u(y_P, 0, 0) \neq 0$.

Lemme 1 *Soit $h \in \mathbb{C}(V)$. Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}_V\,(h) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} h(ay + b, y)\,\partial_y Q(y, a, b)\,dy \\ Q(y, a, b) \end{bmatrix}.$$

En particulier, on a l'égalité $\deg V = \mathrm{Tr}_V\,(1)$.

Preuve. On introduit une fonction plateau θ valant 1 au voisinage de V. Par (1), l'expression de la trace devient

$$\mathrm{Tr}_V(h) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta(x, y)\,h(x, y)\,J(f, l)\,dy \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ f, x_1 - a_1 y - b_1, \ldots, x_n - a_n y - b_n \end{bmatrix}.$$

La fonction

$$(x, y, a, b) \mapsto \theta\,h\,J(f, l)\,(x, y, a, b) - \theta\,h\,J(f, l)(ay + b, y, a, b)$$

est combinaison linéaire des l_i à coefficients semi-méromorphes en $(0, y_P, 0, 0)$. Par le théorème de dualité, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_V\,(h) &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta\, h(x,y)\, J(f,l)(x,y,a,b)\, dy\wedge dx \\ f, l_1, \ldots, l_n \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta(ay+b,y)\, h(ay+b,y)\, J(f,l)(ay+b,y,a,b)\, dy\wedge dx \\ f(ay+b,y), x_1-a_1y-b_1, \ldots, x_n-a_ny-b_n \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta(ay+b,y)\, h(ay+b,y)\, J(f,l_1,\ldots,l_n)(ay+b,y,a,b)\, dy \\ f(ay+b,y) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où les égalités sont dans $\mathcal{M}$. De l'égalité

$$J(f,l)(ay+b,y,a,b) = \Big(\sum_1^n a_i\partial_{x_i} f + \partial_y f\Big)(y,a,b) = \partial_y \widetilde{f}\,(y,a,b),$$

où $\widetilde{f}(y,a,b) = Q(y,a,b)u(y,a,b)$, on déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_V\,(h) &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta(ay+b,y)\, h(ay+b,y)\, \partial_y\widetilde{f}(y,a,b)dy \\ \widetilde{f}(y,a,b) \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta\, h(ay+b,y)\, \partial_y Q\, dy \\ Q \end{bmatrix} + \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \theta\, h(ay+b,y)\, \partial_y u\, dy \\ u \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

la fonction u est inversible sur le support de $y \mapsto p(ay+b,y)$ et le deuxième terme de la somme est nul ; les zéros de Q sont localisés au voisinage de l'origine et la fonction plateau devient inutile dans le premier terme de la somme, ce qui fournit la formule souhaitée pour la trace $\mathrm{Tr}_V\,(h)$. $\square$

Si maintenant $V = V_1 + \cdots + V_k \in \mathcal{V}$ est une somme de germes irréductibles $V_i = \{f_i(x,y) = 0\}$ distincts deux à deux, on définit comme précédemment les fonctions $Q_i \in \mathcal{O}[Y]$ associées aux f_i et, en posant $Q = Q_1 \cdots Q_k$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}_V\,(y^k) = \sum_i \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, \partial_y\, Q_i\, dy \\ Q_i \end{bmatrix} = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, \partial_y Q\, dy \\ Q \end{bmatrix}.$$

Par le théorème d'Abel, les germes $u_k := \mathrm{Tr}_V\,(y^k)$ sont holomorphes en $(a,b) = (0,0)$, avec l'égalité $u_0 = deg\, Q = d$.

Lemme 2 *La matrice $d \times d$ suivante A à coefficients dans $\mathcal{M}$*

$$A = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{d-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{d-1} & u_d & \cdots & u_{2d-2} \end{pmatrix}$$

est non dégénérée sur le corps $\mathcal{M}$. Plus précisément, on a $\mathrm{Det}\, A(a,b) = \mathrm{Disc}\, Q(a,b)$, *où* $\mathrm{Disc}\, Q$ *est le discriminant de* Q.

Preuve. Soit E l'endomorphisme associé à A et $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{d-1}) \in \mathcal{M}^d$ un d-uplet solution de $E(\sigma) = 0$. Cette condition se traduit par

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} Y^k(\sigma_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + \sigma_1 Y + \sigma_0)\,\partial_y Q(Y,a,b)\,dY \\ Q(Y,a,b) \end{bmatrix} = 0\,,\ k = 0, \dots, d-1.$$

Par le théorème de dualité, on a $(\sigma_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + \sigma_1 Y + \sigma_0)\partial_y Q \in (Q)$, impliquant l'égalité $\sigma = (0, \dots, 0)$ par le lemme de Gauss puisque Q est sans facteurs multiples et $\deg Q = d$; on voit par ce biais que $\mathrm{Det}\, A(a_0, b_0) = 0$ si et seulement si les polynômes $\partial_y Q(Y, a_0, b_0)$ et $Q(Y, a_0, b_0)$ ont une racine commune. Pour (a,b) génériques, le polynôme Q a d racines $y_1(a,b), \dots, y_d(a,b)$ distinctes et on a $A = S^t S$ où $S = (y_i^j)_{0 \le i,j \le d-1}$ est la matrice de Vandermonde des racines de Q, d'où $\mathrm{Det}\, A(a,b) = \mathrm{Disc}\, Q(a,b)$. □

Remarque 3 Le germe holomorphe $\mathrm{Det} A$ s'annule en (a,b) si et seulement si l'application $y \mapsto f(ay+b, y)$ a une racine multiple. Géométriquement, la droite $L_{(a,b)}$ est tangente à V ou contient un point singulier de V.

On note $\mathcal{U}[Y] \subset \mathcal{O}[Y]$ l'ensemble des polynômes unitaires vérifiant les n relations

$$\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F)\,, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{3}$$

Lemme 3 *L'ensemble $\mathcal{U}[Y]$ admet une structure de semi-groupe (multiplicatif) gradué avec la graduation naturelle qui hérite de la factorialité de l'anneau $\mathcal{O}[Y]$.*

Preuve. Si F_1 et F_2 sont deux facteurs de F vérifiant

$$\partial_{a_i} F_j - Y \partial_{b_i} F_j \in (F_j) \quad j = 1, 2\,,$$

leur produit vérifie

$$\partial_{a_i}(F_1F_2) - Y\partial_{b_i}(F_1F_2) = F_2(\partial_{a_i}F_1 - Y\partial_{b_i}F_1) + F_1(\partial_{a_i}F_2 - Y\partial_{b_i}F_2) \in (F_1F_2)$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$, ce qui donne à $\mathcal{U}[Y]$ une structure de semi-groupe (multiplicatif) gradué avec la graduation naturelle. Il reste à montrer la factorialité. Soit $F \in \mathcal{U}[Y]$ et soit $F = F_1^{k_1} \cdots F_s^{k_s}$ sa décomposition dans l'anneau factoriel $\mathcal{O}[Y]$. Il suffit de montrer que tout facteur irréductible F_i de F vérifie (3). En posant $F = F_1^{k_1} P$, on a

$$\partial_{a_i} F - Y\partial_{b_i} F = F_1^{k_1}(\partial_{a_i} P - Y\partial_{b_i} P) + kF_1^{k_1 - 1} P(\partial_{a_i} F_1 - Y\partial_{b_i} F_1) \in (F_1^{k_1} P).$$

Ceci implique $k_1 F_1^{k_1-1} P(\partial_{a_i} F_1 - Y\partial_{b_i} F_1) \in (F_1^{k_1})$ pour tout i. Or, P est premier avec F_1 d'où $\partial_{a_i} F_1 - Y\partial_{b_i} F_1 \in (F_1)$, ce qui achève la preuve du Lemme 3. □

Proposition 1 *Il existe un isomorphisme de semi-groupes gradués*

$$\Pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}[Y].$$

Preuve. Soit $V=\{f=0\}\in\mathcal{V}$ irréductible de degré d. On définit

$$\Pi(V):=Y^d-\sigma_{d-1}Y^{d-1}+\cdots+(-1)^{d-1}\sigma_0\,,$$

où $(\sigma_{d-1},\ldots,\sigma_0)\in\mathcal{M}^d$ est l'unique solution du système linéaire (S)

$$\begin{array}{ccccc} u_{d-1}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}u_0\sigma_0=u_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{2d-2}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}u_{d-1}\sigma_0=u_{2d-1}, \end{array}$$

système de Cramer d'après le Lemme 2. Le polynôme $F=\Pi(V)$ vérifie donc

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\,F\partial_yQdy \\ Q\end{bmatrix}=0\,,\quad k=0,\cdots,d-1,$$

et $F\,\partial_yQ\in(Q)$ par le théorème de dualité. Or Q est irréductible (car V l'est), unitaire, et $\deg Q=\deg F$, d'où $Q=F$. Pour $\widetilde{f}=uQ$ définie précédemment, on a

$$0=\partial_{a_i}\widetilde{f}-Y\partial_{b_i}\widetilde{f}=u(\partial_{a_i}F-Y\partial_{b_i}F)+F(\partial_{a_i}u-Y\partial_{b_i}u),\quad\forall\, i=1,\ldots,n$$

et F divise $\partial_{a_i}F-Y\partial_{b_i}F$ dans $\mathcal{O}[Y]$ pour tout $i=1,\ldots,n$, soit $F\in\mathcal{U}[Y]$. Cette construction s'étend par multiplicativité au cas $V\in\mathcal{V}$ quelconque et l'application $\Pi:\mathcal{V}\to\mathcal{U}[Y]$ est un homomorphisme de semi-groupes gradués.

Surjectivité de Π. Soit $F\in\mathcal{U}[Y]$, irréductible de degré d. Le polynôme $F(Y,0,0)$ a dans ce cas une unique racine y_P de multiplicité d : $F(Y,0,0)=(Y-y_P)^d$. La fonction $(x,y,a)\mapsto G(x,y,a):=F(y,a,x-ay)\in\mathbb{C}\{x,y-y_P,a\}$, est régulière de degré d en $y-y_P$. Puisque F est unitaire et vérifie (3) , on a $G\in(\partial_{a_i}G)$ et l'ordre d'annulation en $a_i=0$ de $a_i\mapsto G(x,y,a)$, donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|a_i|=\epsilon}\frac{\partial_{a_i}G\,(x,y,a)}{G(x,y,a)}\,da_i,$$

est nul pour (x,y) voisin de $(0,y_P)$ puisque la fonction sous l'intégrale est holomorphe pour ϵ suffisamment petit. Par utilisations successives du théorème de préparation de Weierstrass (on élimine les variables a_i, $i=1,\ldots,n$), on montre l'existence d'un germe unique (à inversible près) $f\in\mathbb{C}\{x,y-y_P\}$ régulière de degré d en y et d'un germe inversible $q\in\mathbb{C}\{x,y-y_P,a\}$ tels que $G(x,y,a)=f(x,y)q(x,y,a)$. On a

$$\widetilde{f}(y,a,b)=G(ay+b,y,a)q^{-1}(ay+b,y,a)=F(y,a,b)q^{-1}(ay+b,y,a)$$

et le germe $V=\{f=0\}\in\mathcal{V}$ vérifie $F=\Pi(V)$, irréductible puisque F l'est.

Injectivité de Π. Soient $V_1=\{f_1=0\}$ et $V_2=\{f_2=0\}$ deux germes irréductibles en deux points $P_1=(0,y_{P_1})$ et $P_2=(0,y_{P_2})$, de même image F par Π. Dans ce cas, $\widetilde{f}_1(y,a,b)=F(y,a,b)u_1(y,a,b)$ dans $\mathcal{O}\{y-y_{P_1}\}$ et $\widetilde{f}_2(y,a,b)=F(y,a,b)u_2(y,a,b)$ dans $\mathcal{O}\{y-y_{P_2}\}$. Puisque F est irréductible, $F(y,0,0)=(y-y_0)^d$, d'où $P_1=P_2$. Les fonctions $\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{f}_2$ sont définies au voisinage d'un même point et sont égales à un inversible près ; par conséquent $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ également, et $V_1=V_2$. □

Remarque 4 Si $V=\{f=0\}$ (les multiplicités prises en compte), les coefficients du polynôme $F=\Pi(V)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les racines de $y\mapsto\widetilde{f}(y,a,b)$, polynômes en les traces $u_k=\mathrm{Tr}_Vy^k$, $k=0,\cdots,d$.

Remarque 5 L'intersection $V \cap L_0$ est impropre si et seulement si $f \in (x_1, \ldots, x_n)$. Dans ce cas $F = \Pi(V)$ est dans l'idéal engendré par $Y + b_i/a_i$, $i = 1, \ldots, n$; ce polynôme vérifie (3) mais ses coefficients ne sont plus holomorphes en $(a, b) = (0, 0)$. Cependant, on verra au paragraphe 4 que le lieu polaire des coefficients d'un élément de $\mathcal{M}[Y]$ vérifiant les conditions (3) ne dépend pas de b.

3.2 Construction du polynôme H

Soit $V \in \mathcal{V}_{\text{red}}$ un cycle réduit de degré d et $F = \Pi(V)$. On note $\mathcal{M}_F[Y]$ l'ensemble des polynômes $H \in \mathcal{M}[Y]$ de degré $d-1$ vérifiant les relations

$$\partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n\,. \tag{4}$$

Proposition 2 *Il existe une bijection*

$$\rho : \mathbb{C}(V) \to \mathcal{M}_F[Y].$$

Preuve. On suppose dans un premier temps que V est constitué d'un seul germe en $P = (0, y_P)$. Soit $h \in \mathbb{C}(V)$. La construction de ρ est analogue à celle de Π mais on considère cette fois le système (S_h) suivant (les τ_i sont les inconnues) :

$$\begin{array}{ccccc} u_0\tau_0 & + & \cdots & + & u_{d-1}\tau_{d-1} = v_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{d-1}\tau_0 & + & \cdots & + & u_{2d-2}\tau_{d-1} = v_{d-1} \end{array}$$

où $v_k := \mathrm{Tr}_V\,(y^k\, h) \in \mathcal{M}$, $k = 0, \ldots, d-1$. L'unique solution $\tau := (\tau_0, \ldots, \tau_{d-1})$ de ce système de Cramer (Lemme 2) est un vecteur de $\mathcal{M}^d$. On pose

$$H(Y, a, b) := \tau_{d-1}(a, b) Y^{d-1} + \cdots + \tau_1(a, b) Y + \tau_0(a, b) \in \mathcal{M}[Y].$$

Par construction, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} H(y,a,b)\, y^k\, \partial_y F(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} &= \sum_0^{d-1} \tau_i \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{k+i}\, \partial_y F(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} \\ &= \sum_0^{d-1} \tau_i u_{k+i} = v_k \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h(ay+b, y)\, \partial_y F\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pour $k = 0, \ldots, d-1$. Puisque $d = \deg_Y F$, la division euclidienne de y^k par F et le théorème de dualité permettent d'étendre cette égalité à tout $k \in \mathbb{N}$, égalité restant donc valable si on multiplie les deux numérateurs par un élément quelconque de $\mathcal{O}\{y - y_P\}$. La fonction h est restriction à V d'un germe de fonction méromorphe en P qui admet un dénominateur $\xi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}, P}$ (puissance d'un dénominateur universel δ ne dépendant que de V d'après le théorème d'Oka [16]) ; si l'on pose $r(y, a, b) = \xi(ay + b, y)$, il résulte du théorème de dualité que la fonction $(y, a, b) \mapsto r(y, a, b)(H(y, a, b) - h(ay + b, y))\partial_y F$ est dans l'idéal (F) dans $\mathcal{O}\{y - y_P\}$ et il existe $q \in \mathcal{O}\{y - y_P\}$ telle que

$$H(y, a, b) = h(ay + b, y) + \frac{q(y, a, b)}{r(y, a, b)} F(y, a, b) \in \mathcal{M}\{y - y_P\}. \tag{5}$$

Puisque F vérifie (3) et $(\partial_{a_i} - y\partial_{b_i})(r) = (\partial_{a_i} - y\partial_{b_i})(h(ay+b,y)) \equiv 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ on a $\partial_{a_i} H - y\partial_{b_i} H \in (F)$ dans l'anneau $\mathcal{M}[Y]$ et on peut définir $\rho(h) := H$.
D'après l'égalité (5), la restriction à V de l'application $(x,y) \mapsto H(y,a,x-ay)$ pour a générique voisin de 0 est égale à h, ce qui montre l'injectivité de ρ.
Si un polynôme unitaire $H \in \mathcal{M}[Y]$ vérifie (4), on a

$$\partial_{a_i} H - Y\partial_{b_i} H = q_i(a,b) F(Y,a,b)$$

avec l'égalité $q_i = -\partial_{b_i} \tau_{d-1}$ pour tout i. Ainsi

$$\begin{aligned} \partial_{a_i}[H(y,a,x-ay)] &= q_i(a,x-ay)F(y,a,x-ay) \\ &= q_i(a,x-ay)\, u(a,x,y) f(x,y) \end{aligned}$$

où u est un inversible de l'anneau local $\mathbb{C}\{a,x,y\}$ et $V = \{f = 0\}$. Le lieu polaire de la fonction méromorphe $(x,y) \mapsto q_i(a,x-ay)$ ne contient aucune branche de V, sinon $q_i(a,b)$ serait divisible (dans $\mathcal{M}[Y]$) par un facteur de $F(Y,a,b)$, ce qui est absurde. On peut donc restreindre à V les deux membres de cette dernière égalité :

$$\partial_{a_i}[H(y,a,x-ay)]_{|V} = \partial_{a_i}[H(y,a,x-ay)_{|V}] = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

La fonction $H(y,a,x-ay)_{|V}$ ne dépend donc pas de a et définit un germe $h \in \mathbb{C}(V)$. Les coefficients de H étant solutions du système de Cramer (S_h), on a $H = \rho(h)$, ce qui montre la surjectivité de l'application ρ dans le cas d'un germe.

Montrons le cas général. Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ un cycle réduit de degré d qui se décompose sous la forme $V = V_1 + \cdots + V_s$, où $V_j \cap L_0 = \{P_j\}$ et les points P_j sont deux à deux distincts. On pose $F_j = \Pi(V_j)$, $j = 1, \ldots, s$ et $F = \Pi(V)$ sont de degrés respectifs d_j, $j = 1, \ldots, s$ et de d et on note $F_{[j]} = \prod_{l \neq j} F_l$, $j = 1, \ldots, s$. Puisque les germes n'ont aucune branche commune, les polynômes F_j sont premiers deux à deux et il existe d'après le théorème de Bézout s polynômes $U_1, \ldots, U_s \in \mathcal{O}[Y]$ tels que $U_1 F_{[1]} + \cdots + U_s F_{[s]} = 1$. Soit $h \in \mathbb{C}(V)$ une fonction méromorphe définie par $h_{|V_j} =: h_j \in \mathbb{C}(V_j)$ et $H_j = \rho(h_j)$ comme défini ci-dessus. On pose

$$H' := H_1 U_1 F_{[1]} + \cdots + H_s U_s F_{[s]} \in \mathcal{M}[Y]\,.$$

Par le théorème de dualité, on remarque que, pour $k = 0, \ldots, d-1$,

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H'\, \partial_y F\, dy \\ F \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H'\, \partial_y F_j\, dy \\ F_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H_j U_j F_{[j]}\, \partial_y F_j\, dy \\ F_j \end{bmatrix}$$

et en exploitant les relations $U_j F_{[j]} = 1 - \sum_{l \neq j} U_l F_{[l]}$, $j = 1, \ldots, k$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H'\, \partial_y F\, dy \\ F \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H_j\, \partial_y F_j\, dy \\ F_j \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Tr}_{V_1} y^k h_1 + \cdots + \mathrm{Tr}_{V_s} y^k h_s = \mathrm{Tr}_V y^k h. \end{aligned}$$

Le polynôme H' ainsi construit coïncide donc modulo (F) avec l'unique polynôme H de degré $d-1$ à coefficients dans $\mathcal{M}$ dont les coefficients $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_{d-1})$ satisfont le système (S_h). On voit ainsi (en se reportant au cas $V \cap L_0 = \{P\}$) que l'on a les trois propriétés suivantes :

1. le polynôme H vérifie $\partial_{a_i} H - Y\partial_{b_i} H \in (F)$ pour $i = 1, \ldots, n$;

2. pour $j = 1, \ldots, s$,
$$H(y, a, x - ay)_{|V_j} = H_j(y, a, x - ay)_{|F_j(y,a,x-ay)=0} = h_j(x, y);$$
3. $H = 0 \Leftrightarrow h_{|V} \equiv 0$; en effet, $H = 0$ implique que F_j divise $H_j U_j F_{[j]}$; or F_j est premier avec $U_j F_{[j]}$, donc F_j divise H_j et $H_j \equiv 0$ pour raisons de degré, soit encore $h_{j|V_j} \equiv 0$ et ce pour tout $j = 1, \ldots, s$, donc $h_{|V} \equiv 0$.

Ces trois considérations montrent que l'application ρ qui associe à h l'unique polynôme $\rho(h) := H$ dont les coefficients sont solutions du système (S_h) reste définie et bijective dans le cas de germes en plusieurs points. $\square$

Remarque 6 Le polynôme H est le polynôme d'interpolation de Lagrange prenant les valeurs de la fonction $h(ay + b, y)$ en les racines de l'équation $f(ay + b, y) = 0$; l'équation d'onde de choc implique que H vérifie les conditions (4) ; la construction de ρ a l'avantage d'être plus algébrique (on ne soucie plus des singularités).

3.3 Caractérisation des formes traces

Les Propositions 1 et 2 permettent de retrouver $V \in \mathcal{V}_{red}$ et $h \in \mathbb{C}(V)$ à partir des traces d'un nombre fini de fonctions restreintes au sous-ensemble $\{a = 0\} \subset \mathbb{G}(1, n + 1)$. On obtient le

Théorème 1 *La donnée d'un cycle $V \in \mathcal{V}$ équivaut à la donnée des germes en 0 des fonctions*
$$b \mapsto \mathrm{Tr}_V\,(y^k)(0, b)\,, \qquad k = 0, \ldots, \mathrm{Tr}_V\,(1) - 1\,;$$
si $V \in \mathcal{V}_{red}$, la donnée de $h \in \mathbb{C}(V)$ équivaut à la donnée des germes en 0
$$b \mapsto \mathrm{Tr}_V\,(y^k\,h)(0, b)\,, \quad k = 0, \ldots, \mathrm{Tr}_V\,(1) - 1\,.$$

Preuve. Un sens est évident. A l'inverse, si l'on connaît les traces $\mathrm{Tr}_V\,(y^k)(0, b)$ pour $k = 0, \ldots, \mathrm{Tr}_V\,(1) - 1$ on connaît le degré $d = \mathrm{Tr}_V\,1$ de V et on peut construire le polynôme $F(Y, 0, b)$ à partir des formules de Newton (on peut aussi se passer de ces formules en utilisant le système de Cramer (S), mais il faut dans ce cas connaître les fonctions $b \mapsto \mathrm{Tr}_V\,(y^k)(0, b)$ jusqu'à $k = 2d - 1$). Si $a = 0$, le système (S_h) reste non dégénéré sur le corps des germes méromorphes en b d'après la Remarque 6 (sinon toutes les droites "verticales" couperaient "mal" V ce qui est absurde). De même, les traces $v_k(0, b) = \mathrm{Tr}_V y^k h(0, b)$ ont un sens pour b générique voisin de 0 et permettent de déterminer les traces $\mathrm{Tr}_V y^k h(0, b)$ pour $k \geq d - 1$ par division euclidienne de y^k par $F(y, 0, b)$. On peut alors définir le polynôme $H(Y, 0, b)$ via le système (S_h) restreint à $a = 0$. On a alors $V = \{F(y, 0, x) = 0\}$ et la fonction $(x, y) \mapsto H(y, 0, x)$ méromorphe sur V coïncide avec $h \in \mathbb{C}(V)$. $\square$

Le théorème suivant permet une nouvelle caractérisation des formes traces (autre que celle donnée par exemple dans [13]) en termes cette fois de sommes complètes de résidus de fractions rationnelles en une variable à coefficients dans $\mathcal{M}$.

Théorème 2 *Un germe de n-forme méromorphe ϕ au point $(a,b)=(0,0)$ de $\mathbb{G}(1,n+1)$ est la trace d'une n-forme méromorphe $\Phi\in M^n(V)$ sur un cycle réduit $V\in\mathcal{V}_{red}$ de degré d si et seulement s'il existe deux polynômes $F\in\mathcal{U}[Y]$ et $H\in\mathcal{M}_F[Y]$ de degrés d et $d-1$ tels que*

$$\phi(a,b)=\mathrm{Res}\begin{bmatrix} H\,(\partial_y F-\sum_{j=1}^n a_j\partial_{b_j}F)(y,a,b)\,dy\wedge\bigwedge_{i=1}^n(db_i+yda_i) \\ \\ F(y,a,b)\end{bmatrix}. \quad (6)$$

On a alors $\phi=\mathrm{Tr}_V\Phi$ où $V=\{F(y,0,x)=0\}$ et $\Phi=H(y,0,x)dx$.

Preuve. Pour $V\in\mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ et $\Phi\in M^n(V)$, on montre d'abord que $\mathrm{Tr}_V\,\Phi$ se représente sous la forme (6). Si $V=V_1+\cdots+V_s$, où les germes V_j sont en des points $P_j\in L_0$ distincts deux à deux, il existe $h\in\mathbb{C}(V)$, avec $h_j:=h_{|V_j}\in\mathbb{C}(V_j)$, telle que $\Phi(x,y)=h(x,y)dx$. On pose $F_j=\Pi(V_j)$, $F=\Pi(V)$, $H_j=\rho(h_j)$ et $H=\rho(h)$. D'après l'expression (2) dans la Section 2.2, la forme $\mathrm{Tr}_V\,(\Phi)$ admet $n+1$ coefficients $w_0,\ldots,w_n$ distincts

$$w_k(a,b):=\sum_{j=1}^s\mathrm{Res}\begin{bmatrix}\theta_j\,y^k\,h_j\,\partial_y f_j(x,y)\,dx\wedge dy\\ f_j(x,y),x_1-a_1y-b_1,\ldots,x_n-a_ny-b_n\end{bmatrix},$$

$k=0,\cdots n$, où θ_j est une fonction plateau valant 1 au voisinage de P_j. Puisque $f_j(x,y)=u_j(a,x,y)F_j(y,a,x-ay)$ avec $u_j\in\mathbb{C}\{x,y-y_{P_j},a\}$ inversible, on peut remplacer $f_j(x,y)$ par $F_j(y,a,x-ay)$ dans l'expression ci-dessus. Or,

$$\partial_y(F_j(y,a,x-ay))=\Big(\partial_yF_j-\sum_{i=1}^n a_i\partial_{b_i}F_j\Big)(y,a,x-ay)\ ,j=1,\cdots,s$$

et, par l'argument de la preuve du Lemme 2, on obtient les égalités

$$w_k(a,b)=\sum_{j=1}^s\mathrm{Res}\begin{bmatrix}y^k\,h_j(ay+b,y)\,\Big(\partial_yF_j-\sum\limits_{i=1}^n a_i\partial_{b_i}F_j\Big)(y,a,b)\,dy\\ F_j(y,a,b)\end{bmatrix}$$

pour $k=0,\ldots,n$. D'après la formule (5) appliquée à h_j et F_j, la fonction $h_j(ay+b,y)-H_j(y,a,b)$ est dans l'idéal $(F_j(y,a,b))$ de $\mathcal{M}\{y-y_{P_j}\}$ et

$$w_k(a,b)=\sum_{j=1}^s\mathrm{Res}\begin{bmatrix}y^k\,H_j(y,a,b)\,\Big(\partial_yF_j-\sum\limits_{i=1}^n a_i\partial_{b_i}F_j\Big)(y,a,b)\,dy\\ F_j(y,a,b)\end{bmatrix}\quad k=0,\ldots,n.$$

En calquant la construction de ρ (cas de plusieurs germes), on obtient

$$w_k(a,b)=\mathrm{Res}\begin{bmatrix}y^k\,H(y,a,b)\,\Big(\partial_yF-\sum\limits_{i=1}^n a_i\partial_{b_i}F\Big)(y,a,b)\,dy\\ F(y,a,b)\end{bmatrix},\quad k=0,\ldots,n$$

ce qui montre que $\mathrm{Tr}_V\,[h\,dx]$ est de la forme voulue.

Réciproquement, si ϕ vérifie (6), on peut poser $V=\Pi^{-1}(F)$ et $h=\rho^{-1}(H)$ pour constater (en prenant les calculs à l'envers) que l'on a $\phi=\mathrm{Tr}_V\,(h\,dx)$. $\square$

Les sommes complètes de résidus de la formule (6) s'obtiennent *via* l'algorithme de division euclidienne dans l'anneau $\mathcal{M}[Y]$. On remarque que les coefficients de la trace s'expriment sous la forme de l'action d'opérateurs différentiels non linéaires à coefficients polynomiaux en les coefficients σ_l de F et linéaires en les coefficients τ_l de H et les dérivées partielles des σ_j.

4 Applications

4.1 Le théorème d'Abel-inverse

On se propose ici d'exploiter les résultats établis dans la section précédente pour démontrer une version plus forte du théorème d'Abel-inverse version rationnelle que celle obtenue dans [16] :

Théorème 3 *Soient $V \in \mathcal{V}_{\rm red}$ de degré d et $\Phi \in M^n(V)$ non identiquement nulle sur aucune des composantes de V. Le cycle V est inclus dans une hypersurface algébrique $\widetilde{V}$ de $\mathbb{P}^{n+1}$ de degré d et Φ se prolonge en une n-forme rationnelle sur $\widetilde{V}$ si et seulement si le germe de forme méromorphe* $\mathrm{Tr}_V\Phi$ *est le germe d'une forme rationnelle en b.*

Remarque 7 Il est essentiel de supposer que Φ n'est identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles du cycle analytique V. Sinon, on n'obtient aucune information relative aux composantes de V sur lesquelles Φ est nulle ; on peut seulement conclure que les autres composantes sont algébriques.

Preuve du Théorème 3. Le sens direct est une conséquence immédiate du théorème d'Abel. On montre le sens indirect. On peut toujours supposer que $\Phi = h(x,y)dx$, où $h \in \mathbb{C}(V)$. Soit $H = \rho(h)$ et $F = \Pi(V)$, où

$$F(Y,a,b) = Y^d - \sigma_{d-1}(a,b)Y^{d-1} + \cdots + (-1)^{d-1}\sigma_0(a,b).$$

On introduit les germes $w_k \in \mathcal{M}$

$$w_k(a,b) := \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, H(y,a,b)\left(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\,dy \\ F(y,a,b)\end{bmatrix},\ k = 0,\dots,n\,.$$

D'après le Théorème 2, la rationalité en b supposée de la trace équivaut à la rationalité en b des germes w_k, $k = 0,\dots,n$. On a besoin du lemme de prolongement suivant, concernant le comportement de la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lemme 4 *La suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obéit aux trois règles suivantes :*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a*

$$\partial_{a_i}(w_k) = \partial_{b_i}(w_{k+1}).$$

2. *La fonction w_k est rationnelle en b pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

3. *Les fonctions w_k, $k = 0, \ldots, 2d-1$ vérifient le système linéaire $(\widetilde{S}_h)$ suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} w_{d-1}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}w_0\sigma_0 = w_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{2d-2}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}w_{d-1}\sigma_0 = w_{2d-1} \end{array}$$

Preuve. Pour le point 1, il suffit de faire le calcul directement à partir de l'écriture des w_k de l'introduction (formule (2)) :

$$w_k(a,b) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h\, \partial_y f(x,y)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), x_1 - a_1 y - b_1, \ldots, x_n - a_n y - b_n \end{bmatrix}.$$

L'écriture explicite du résidu sous forme de représentation intégrale impliquant le noyau de Cauchy (voir par exemple [12], chapitre 6) permet de différentier les symboles résiduels par rapport aux paramètres (a,b) :

$$\begin{aligned} \partial_{a_i}(w_k) &= -\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k\, h\, \partial_y f(x,y)\, \partial_{a_i}(l_i)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_n \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{k+1}\, h\, \partial_y f(x,y)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_n \end{bmatrix} \\ &= -\mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^{k+1}\, h\, \partial_y f(x,y)\, \partial_{b_i}(l_i)\, dx \wedge dy \\ f(x,y), l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_n \end{bmatrix} \\ &= \partial_{b_i}(w_{k+1}) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ , \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

On montre le point 2 par récurrence sur k. C'est vrai pour $k = 0, \ldots, n$ par hypothèse. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $k-1$.

On suppose d'abord que $w_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On reprend ici l'astuce utilisée par G. Henkin et M. Passare [16] pour éviter les pôles simples (ce point, directement inspiré de l'article fondateur d'Abel [1, 4], paraît être le point clef de la démonstration). On pose pour cela $w_k' = w_k + c w_{k-1}$ où $c \in \mathbb{C}^*$. D'après le point 1, on a, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \partial_{b_i}(w_k') &= \partial_{b_i}(w_k + c w_{k-1}) = \partial_{a_i}(w_{k-1} + c w_{k-2}) = \partial_{a_i}(w_{k-1}') \\ \partial_{b_i}(w_k') &= (\partial_{a_i} + c\partial_{b_i})(w_{k-1}). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\partial_{b_i}(w_k')$ admet-elle les deux primitives distinctes w_{k-1} et w_{k-1}' dans les deux directions linéairement indépendantes ∂_{a_i} et $\partial_{a_i} + c\partial_{b_i}$ (car $w_{k-2} \neq 0$ par l'hypothèse faite pour l'instant). Par hypothèse $\partial_{b_i}(w_k') = (\partial_{a_i} + c\partial_{b_i})(w_{k-1})$ est rationnelle en b_i ; le fait que cette fonction méromorphe ait deux primitives distinctes dans deux directions linéairement indépendantes exclut que l'on puisse rencontrer un terme du type

$$\frac{\alpha_{a,\hat{b}_i}}{b_i - \beta(a,\hat{b}_i)}$$

dans la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle dans la clôture intégrale du corps des germes de fonctions méromorphes en $a, b_1, \ldots, \widehat{b_i}, \ldots, b_n$ à l'origine de $\mathbb{C}^{2n-1}$ (la notation $\widehat{b_i}$ désigne l'omission de la variable b_i). On peut donc intégrer selon la variable b_i : on obtient une nouvelle fraction rationnelle en b_i puisqu'il ne peut plus y avoir de pôles simples et donc de logarithme dans la primitive. De l'égalité $w_k = w_k' - c w_{k-1}$, on déduit alors que la fonction w_k est rationnelle en b_i puisque les fonctions w_k' et w_{k-1} le sont.

Si maintenant $w_k = 0$ pour un $k \in \mathbb{N}$ (on prend le plus petit k pour lequel ceci se produit), puisque $0 = \partial_{a_i}(w_k) = \partial_{b_i}(w_{k+1})$ pour $i = 1, \ldots, n$, la fonction w_{k+1} ne dépend pas de b ; comme $\partial_{b_i}(w_{k+2}) = \partial_{a_i}(w_{k+1})$, la fonction w_{k+2} est polynômiale de degré 1 en b ; de proche en proche, on montre alors que w_{k+j} est polynômiale de degré $< j$ en b pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Le point 3 résulte des identités

$$\operatorname{Res}\left[\begin{array}{c} y^k\, H(y,a,b)\, F(y,a,b) \left(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{array}\right] = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ (propriété du calcul résiduel), qui, une fois F développé au numérateur, montre par linéarité que les w_k vérifient le système $(\widetilde{S}_h)$. □

Remarque 8 A partir de l'expression (2), la clause 1 du Lemme 4 montre que la trace d'une n-forme est fermée en dehors de son lieu polaire. Ceci est une conséquence du fait que

$$d(\Phi \wedge [V]) = d\Phi \wedge [V] = 0$$

si Φ est une forme de degré maximal sur V et que d commute avec le *pull-back* et l'image directe.

Avant de reprendre la preuve du théorème 3, on prouve le

Lemme 5 *Le système* $(\widetilde{S}_h)$ *est un système de Cramer.*

Preuve. On raisonne par l'absurde. Si $(\widetilde{S}_h)$ est un système dégénéré, il existe un polynôme $Q \in \mathcal{M}[Y]$, unitaire de degré d, différent de F, tel que

$$\operatorname{Res}\left[\begin{array}{c} y^k\, H(y,a,b) Q(y,a,b) \left(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{array}\right] = 0$$

pour $k = 0, \ldots, d-1$. Le théorème de dualité implique que le polynôme $Q\, H\, (\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F)$ est dans l'idéal engendré par F dans $\mathcal{M}[Y]$. Puisque $Q \neq F$ et que F est réduit, il existe un facteur irréductible F_j de F (une fois F décomposé dans $\mathcal{M}[Y]$) qui divise $H(\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F)$. Deux situations sont envisageables :

1. le polynôme F_j divise H, auquel cas $H(y,0,x)_{|\{F_j(y,0,x)=0\}} = 0$: c'est le cas pathologique exclu où la forme Φ est nulle sur une composante de V ;
2. le polynôme F_j divise $\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F$; en notant $F = F_j \widetilde{F}$ (F_j et $\widetilde{F}$ étant premiers entre eux), on a :

$$\partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F = \widetilde{F} \left(\partial_y F_j - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F_j\right) + F_j \left(\partial_y \widetilde{F} - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} \widetilde{F}\right),$$

ce qui implique que F_j divise $\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j$ par le lemme de Gauss. Pour des raisons de degré, on a $\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j = 0$ et $\partial_y(F_j(y,a,x-ay)) = 0$: l'équation de la branche $V_j = \Pi(F_j)$ ne dépend pas de y et $V_j \subset L_0$, situation elle aussi exclue.

Le système $(\widetilde{S}_h)$ est donc de Cramer. $\square$

Suite et fin de la preuve du Théorème 3. En combinant les Lemmes 4 et 5, on voit que $\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}$ s'expriment rationnellement en fonction des w_k, $k = 0, \ldots, 2d-1$. Les coefficients de F sont donc rationnels en b. Le Lemme 6 ci-après assure que les coefficients de F sont automatiquement polynômiaux en b et l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^{n+1}\,;\, F(y,0,x) = 0\}$$

définit une hypersurface algébrique $\widetilde{V} \subset \mathbb{P}^{n+1}$, contenant V, de degré

$$\deg \widetilde{V} = \mathrm{Tr}_{\widetilde{V}}(1) = \mathrm{Res}\begin{bmatrix} \partial_y F(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} = d.$$

En particulier, $\widetilde{V} \cap L_0 = V \cap L_0$.

On montre maintenant la rationalité de Φ. On introduit les coefficients holomorphes $\xi_k \in \mathcal{O}$, $k \in \mathbb{N}$ des traces $\mathrm{Tr}_V\,(y^l\,dx)$, $l \in \mathbb{N}$

$$\xi_k := \mathrm{Res}\begin{bmatrix} y^k \left(\partial_y F - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \partial_{b_i} F\right)(y,a,b)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Les coefficients de H vérifient (on le voit en développant H) le système

$$(\check{S}_h) \qquad \begin{matrix} \xi_{d-1}\tau_{d-1} & + & \cdots & + & \xi_0\tau_0 = w_0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{2d-2}\tau_{d-1} & + & \cdots & + & \xi_{d-1}\tau_0 = w_{d-1} \end{matrix}$$

Comme pour la preuve du Lemme 5, on montre que ce système est de Cramer. Puisque les coefficients de F sont rationnels en b, les fonctions ξ_l, donc les coefficients τ_k de H, le sont. D'après la preuve du Théorème 1, la forme $H(y,0,x)\,dx$ définit une forme $\widetilde{\Phi}$ rationnelle sur $\widetilde{V} \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ prolongeant la forme Φ. $\square$

Cette preuve pourrait s'adapter à la version locale d'Abel-inverse : si la trace de Φ sur V se prolonge à un ouvert dual connexe $\widetilde{U}^*$ contenant U^*, l'ensemble V se prolonge en une hypersurface analytique fermée $\widetilde{V}$ de l'ouvert 1-concave $\widetilde{U}$ (contenant U) dont le dual est $\widetilde{U}^*$ et Φ se prolonge en une forme $\widetilde{\Phi}$ méromorphe sur $\widetilde{V}$ telle que $\widetilde{\Phi}_{|V} = \Phi$.

Remarque 9 Les bijections Π et ρ permettent de montrer que toute propriété vérifiée par $\mathrm{Tr}_V\,(h(x,y)dx)$ se répercute en une propriété (en les variables $b_1, \ldots, b_n$) pour les coefficients des polynômes $F = \Pi(V)$ et $H = \rho(V)$. Le fait que les applications Π^{-1} et ρ^{-1} ne se soucient pas du comportement en a permet de basculer les propriétés de $\mathrm{Tr}_V\,(h(x,y)dx)$ en des propriétés relatives à V et h. Ce principe semble pouvoir être utilisé pour démontrer le théorème d'Abel-inverse dans le cas trace algébrique présenté dans [5].

Il semble intéressant de souligner qu'une fois le degré d précisé, le théorème 3 combiné avec le Lemme 6 suivant permet d'affirmer que toutes les solutions $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}, \tau_0, \ldots, \tau_{d-1}) \in \mathcal{M}^{2d}$ du système linéaire du premier ordre en les inconnues τ_j, $j = 0, \ldots, d-1$, différentiel polynomial du premier ordre en les inconnues σ_j, $j = 0, \ldots, d-1$, avec second membre donné Ψ, s'écrivant :

$$\begin{aligned} F &= Y^d - \sigma_{d-1} Y^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_0 \in \mathcal{U}[Y] \\ H &= \tau_{d-1} Y^{d-1} + \cdots + \tau_1 Y + \tau_0 \in \mathcal{M}_F[Y] \\ \mathrm{Res} & \begin{bmatrix} H\,(\partial_y F - \sum_j a_j \partial_{b_j} F)(y,a,b)\, dy \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (db_i + y da_i) \\ \\ F(y,a,b) \end{bmatrix} = \Psi(a,b) \end{aligned}$$

sont des solutions rationnelles si F et H sont supposés premiers entre eux (ou algébriques si cette dernière restriction n'est pas imposée) dès que le second membre (c'est-à-dire la n-forme Ψ) est une forme rationnelle. Cette remarque indique que l'on peut concevoir le théorème Abel inverse comme un résultat de *rigidité* relatif à un système différentiel non linéaire d'un type très particulier (linéaire d'ordre 0 en τ, d'ordre 1 en les dérivées de σ, polynômial en σ). Il paraît dès lors important de formuler de manière identique (c'est-à-dire en terme de rigidité d'un certain système différentiel du même type) des théorèmes du type Abel inverse quand la grassmannienne est remplacée par une famille de courbes (voir [9] pour une généralisation du théorème classique d'Abel inverse dans ce cadre) ou en remplaçant la variété ambiante $\mathbb{P}^n$ par une variété torique lisse complète (voir [6], [8]) de dimension $n+1$.

4.2 Le lien avec le théorème de Wood

Le théorème de Wood [18] affirme que l'existence d'une hypersurface algébrique de degré d interpolant $V \in \mathcal{V}_{red}$ équivaut au fait que la trace de y soit affine en $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Si la trace d'une forme quelconque est rationnelle, cette hypersurface existe, donc la trace de y doit être affine en b. On montre ici que ce résultat s'explique par la rigidité du système différentiel vérifié par les coefficients de F.

Lemme 6 *Si $F(Y,a,b) \in \mathcal{M}[Y]$ vérifie (3), ses coefficients sont holomorphes en b.*

Preuve. On suppose $n = 1$. On peut toujours écrire F sous la forme

$$F = Y^d - \frac{c_{d-1}}{p_{d-1}}(a,b) Y^{d-1} + \cdots \pm \frac{c_0}{p_0}(a,b),$$

où $p_{d-1}, \ldots, p_0, c_{d-1}, \ldots, c_0$ sont dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $(0,0)$, avec p_i, c_i premiers entre eux et $p_{d-i} = a^{k_{d-i}} P_{d-i}$ où P_{d-i} est un polynôme de Weierstrass en b. On veut montrer P_{d-i} est de degré nul. Puisque F vérifie (3), on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \partial_a\Big(\frac{c_{d-i}}{p_{d-i}}\Big) + \partial_b\Big(\frac{c_{d-i-1}}{p_{d-i-1}}\Big) &= \frac{c_{d-i}}{p_{d-i}} \partial_b\Big(\frac{c_{d-1}}{p_{d-1}}\Big), \quad i = 1, \ldots, d-1 \quad (d-i) \\ \partial_a\Big(\frac{c_0}{p_0}\Big) &= \frac{c_0}{p_0} \partial_b\Big(\frac{c_{d-1}}{p_{d-1}}\Big). \qquad (0) \end{aligned}$$

On montre par récurrence sur i que toute racine de p_{d-i-1} est racine de p_{d-1}. Pour $i=1$, l'équation $(d-1)$ se réécrit

$$
\begin{aligned}
p_{d-2}^2 p_{d-1}(p_{d-1}\partial_a c_{d-1} - c_{d-1}\partial_a p_{d-1}) + p_{d-1}^3(p_{d-2}\partial_b c_{d-2} - c_{d-2}\partial_b p_{d-2}) \\
= p_{d-2}^2 c_{d-1}(p_{d-1}\partial_b c_{d-1} - c_{d-1}\partial_b p_{d-1}).
\end{aligned}
$$

Par le lemme de Gauss, on en déduit que l'on a

$$
\begin{aligned}
p_{d-1} \quad &\text{divise} \quad p_{d-2}^2\partial_b p_{d-1} \\
p_{d-2} \quad &\text{divise} \quad p_{d-1}^3\partial_b p_{d-2}
\end{aligned}
$$

dans l'anneau des germes à l'origine et $p_{d-1}=0$ si et seulement si $p_{d-2}=0$. Pour $0<i<d$, l'équation $(d-i)$ se réécrit

$$
\begin{aligned}
p_{d-i-1}^2 p_{d-1}^2(p_{d-i}\partial_a c_{d-i} - c_{d-i}\partial_a p_{d-i}) + p_{d-i}^2 p_{d-1}^2(p_{d-i-1}\partial_b c_{d-i-1} - c_{d-i-1}\partial_b p_{d-i-1}) \\
= p_{d-i-1}^2 p_{d-i} c_{d-i}(p_{d-1}\partial_b c_{d-1} - c_{d-1}\partial_b p_{d-1}). \qquad (d-i)'
\end{aligned}
$$

Pour $i=0$, l'équation (0) se réécrit sous la forme

$$
p_{d-1}^2(p_0\partial_a c_0 - c_0\partial_a p_0) = p_0 c_0(p_{d-1}\partial_b c_{d-1} - c_{d-1}\partial_b p_{d-1}). \qquad (0)'
$$

Par $(d-i)'$, on constate que

$$
p_{d-i-1} \quad \text{divise} \quad p_{d-i}^2 p_{d-1}^2 c_{d-i-1}\partial_b p_{d-i-1}, \quad \forall i=1,\ldots,d-1.
$$

Or toute racine $b^{(j)}$ de p_{d-i-1} d'ordre $\nu_{d-i-1,j}>0$ est racine de $\partial_b p_{d-i-1}$ d'ordre $\nu_{d-i-1,j}-1$ et doit donc être racine de $p_{d-i}^2 p_{d-1}^2 c_{d-i-1}$, donc de p_{d-1} grâce aux hypothèses faites. On a donc l'implication

$$
\nu_{d-i,j}>0 \Longrightarrow \nu_{d-1,j}>0, \quad \forall\, i=1,\ldots,d, \quad \forall\, j=1,\ldots,s.
$$

En regardant l'ordre d'annulation des deux membres de l'équation $(0)'$ en $b^{(j)}$, on obtient l'inégalité

$$
2\nu_{d-1,j}+\nu_{0,j}-1 \le \nu_{d-1,j}+\nu_{0,j}-1;
$$

d'où $\nu_{d-1,j}=0$. Les autres exposants $\nu_{d-i,j}, i=2,\ldots,d$ sont nuls par ce qui précède, ce pour tout $j=1,\ldots,s$ ce qui finit la preuve. Le cas $n>1$ se traite de la même manière variable par variable. $\square$

Si les coefficients de $F = Y^d - \sigma_{d-1}(a,b)Y^{d-1} + \cdots + (-1)^{d-1}\sigma_0(a,b)$ sont rationnels en b, ils sont donc automatiquement polynômiaux en b. Or toujours à cause de l'équation différentielle vérifiée par F, on a :

$$
\partial_{a_i}\sigma_0 = -\sigma_0\partial_{b_i}\sigma_{d-1} \quad i=1,\ldots,n.
$$

Le degré en b_i du polynôme $\partial_{a_i}\sigma_0$ étant inférieur ou égal à celui de σ_0, le polynôme en b_i $\partial_{b_i}\sigma_{d-1}$ est de degré nul, ce pour tout $i=1,\ldots,n$. La fonction σ_{d-1} est donc affine en b. Cette fonction est la somme des racines de F et correspond à la trace de y. L'équation différentielle (3), (semblable à l'équation d'onde de choc) permet donc d'établir la trame logique qui relie les théorèmes d'Abel-inverse et de Wood.

4.3 Calcul de $\dim \omega_V^n(V)$

Soit V une hypersurface algébrique de $\mathbb{P}^{n+1}$ de degré d. On veut caractériser l'espace vectoriel $\omega_V^n(V)$ des formes abéliennes sur V. Si Φ est abélienne sur V, sa trace est une forme holomorphe sur la grassmannienne $\mathbb{G}(1, n+1)$, donc nulle. On peut toujours choisir un système de coordonnées pour lequel l'hypersurface V est coupée proprement par la droite $L_0 = \{x = 0\}$ dans l'espace affine $\mathbb{C}^{n+1}$ et définit un élément de $\mathcal{V}_{\mathrm{red}}$ de degré d. Par unicité du prolongement analytique et d'après le Théorème 1, toute forme $\Phi = hdx$ méromorphe sur V est uniquement déterminée par les d fonctions $b \mapsto v_k(0,b) = \mathrm{Tr}_V y^k h(0,b)$, $k = 0, \ldots, d-1$ pour b voisin de 0. Or pour $a = 0$, on remarque que l'on a $v_k(0,b) = w_k(0,b)$ et si Φ est abélienne les fonctions $w_0, \ldots, w_n$ sont nulles et les fonctions w_{n+i}, $i \in \mathbb{N}$ sont polynômiales en b de degré $< i$ d'après la preuve de la propriété 3 du Lemme 4. Une forme abélienne de degré maximal sur V est donc uniquement déterminée par la collection de $d-n-1$ polynômes à n variables $P_i(b_1, \ldots, b_n) := w_{n+i}(0,b)$, $i = 1, \ldots, d-n-1$ avec $\deg P_i < i$, d'où la majoration

$$\dim \omega_V^n(V) \leq \binom{d-1}{n+1},$$

avec $\omega_V^n(V) = \{0\}$ si $d < n+2$.

On considère maintenant, sous leur écriture affine, les formes rationnelles

$$\Phi(x,y) = \frac{P(x,y)}{\partial_y f(x,y)} dx$$

où

$$P(x,y) = a_0 y^{d-n-2} + a_1(x) y^{d-n-3} + \cdots + a_{d-n-2}(x), \quad deg\ a_i \leq i$$

est un polynôme en (x,y) de degré total inférieur ou égal à $d-n-2$ et f est un polynôme de degré d (non divisible par x, comme dans le cas des germes) donnant l'équation affine de V. Dans ce cas,

$$\mathrm{Tr}_V \Phi(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \Big(w_k(a,b) \big(\sum_{|I|=k} da_I \wedge db_{I^c} \big) \Big)$$

et en utilisant la formule (2) du paragraphe 2 et le Lemme 1, on obtient

$$w_k(a,b) = \mathrm{Res} \begin{bmatrix} y^k\, P(ay+b,y)\, dy \\ F(y,a,b) \end{bmatrix}.$$

Si $k \leq n$, on a $\deg\left(y^k\, P(ay+b,y)\right) \leq deg\, F - 2$ et $w_k(a,b) = 0$ par le théorème d'Abel-Jacobi. Toute forme ainsi définie est donc abélienne.

En particulier, les formes

$$\frac{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y^{i_{n+1}}}{\partial_y f(x,y)} dx, \quad i_1 + \cdots + i_{n+1} \leq d-n-2$$

sont abéliennes, $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes sur V (sinon il existe un polynôme non nul de degré $d-n-2$ qui s'annule sur V) d'où l'égalité

$$\dim \omega_V^n(V) = \binom{d-1}{n+1}.$$

L'utilisation de la trace permet de ne pas se soucier du comportement de Φ à l'infini (contrairement aux caractérisations des formes abéliennes en général, par exemple [15]). Le fait que Φ n'ait pas de pôles sur l'hyperplan à l'infini $\{Z=0\}$ (sauf éventuellement sur $\mathrm{Sing}(V)$) est une conséquence de l'annulation de la trace : on évite ainsi les changements de carte de $\mathbb{P}^{n+1}$. Pour $q<n$, il semble réaliste d'utiliser à nouveau le théorème 1 pour trouver la borne de Castelnuovo optimale de $\dim \omega_V^q(V)$ obtenue par Alain Hénaut dans [15].

Références

[1] N.H. Abel, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions trancendantes, note présentée à L'Académie des sciences à Paris le 30 Octobre 1826, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Christiania, 1881, vol 1, 145-211.

[2] D. Barlet, Le faisceau $\omega_X^\bullet$ sur un espace analytique X de dimension pure, Lecture Notes in Math. 670, Springer-Verlag, 1978, 187–204.

[3] Berenstein, Carlos A. et Yger, Alain, Residue calculus and effective Nullstellensatz, in *American Journal of Mathematics*, Vol. 121, 4, 1999, 723-796.

[4] J.E. Björk, Residues and $\mathcal{D}$-modules, dans *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 Laudal, Olav Arnfinn ; Piene, Ragni (Eds.), Springer-Verlag, 2004, pp. 605-652.

[5] S. Collion, Transformation d'Abel et formes différentielles algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323, 1996, no. 12, 1237-1242.

[6] D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Using algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 185. Springer-Verlag, New York, 1998.

[7] D.Cox, Toric residues, Ark Mat. 34 (1996), 73-96.

[8] D.Cox, What is a toric variety ? Topics in algebraic geometry and geometric modeling, 203–223, Contemp. Math., 334, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. (Reviewer : Nicolas Pouyanne)

[9] B. Fabre, Nouvelles variations sur les théorèmes d'Abel et Lie, Thèse soutenue le 04/12/2000, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris 6.

[10] B. Fabre, Sur la transformation d'Abel-Radon des courants localement résiduels, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. IV (2005), 27-57.

[11] P.A. Griffiths, Variations on a therorem of Abel, Inventiones math. 35, 1976, 321-390.

[12] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and applied mathematics, Wiley-Interssciences, 1978.

[13] G. Henkin La transformation de Radon pour la cohomologie de Dobeault et un théorème d'Abel-inverse, C. R. Acad. sci.Paris, t.315, série I, 1992, 973-978.

[14] G. Henkin, Abel-Radon transform and applications, dans *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 Laudal, Olav Arnfinn ; Piene, Ragni (Eds.), Springer-Verlag, 2004, pp. 567-584.

[15] A. Hénaut, formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo et géométrie des tissus, Comment. Math. Helv. 79, 2004, 25-57.

[16] G. Henkin, M. Passare, Abelian differentials on singular varieties and variation on a theorem of Lie-Griffiths, Inventiones math. 135, 297-328, 1999.

[17] M. Passare, Residues, currents, and their relation to ideals of meromorphic functions, Math. Scand. 62, 1988, 75-152.

[18] J.A. Wood, a simple criterion for an analytic hypersurface to be algebraic, Duke Mathematical Journal 51, 1, 1984, 235-237.

[19] A. Yger, La transformée de Radon sous ses différents aspects, Notes d'un cours de DEA, Bordeaux, 2002, *notes manuscrites.*