Calcul des morphismes gonaux

Martin Weimann

Avec J. Schicho et F-O. Schreyer

Motivations et résultats

Gonalité

Soit C une courbe projective irréductible sur un corps $\mathbb{K}$.

*La **gonalité** de C est le plus petit entier k tel qu'il existe un morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ de degré k défini sur une extension finie de $\mathbb{K}$.*

Comme le genre, c'est un *invariant birationnel* qui mesure la non rationalité d'une courbe.

$$\mathrm{gon}(C) = 1 \iff C \textit{ rationnelle}$$

$$\mathrm{gon}(C) = 2 \iff C \textit{ hyperelliptique}$$

Résultat

Théorème : *Il existe un algorithme déterministe qui, donnée C, retourne* $\mathrm{gon}(C)$ *et un morphisme gonal* $f : C \to \mathbb{P}^1$.

Applications :

- Représentation de $\mathbb{K}(C)$ comme extension de petit degré de $\mathbb{K}(t)$.
- Paramétrisation par radicaux (tracé de courbes, etc.).

Stratégie : Chercher une variété X telle que ce diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} C & \subset & X \\ & f \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

et telle que la projection $X \to \mathbb{P}^1$ soit facile à calculer.

Plongement canonique et scrolls

Plongement canonique

- Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$. Le faisceau canonique ω_C induit un morphisme canonique
$$C \to \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(\Gamma(C, \omega_C)).$$
C'est un plongement si C n'est pas hyperelliptique.

- Il existe des algorithmes pour calculer l'idéal homogène du modèle canonique
$$I_C \subset S := \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{g-1}].$$

- Par le théorème de Max Noether, l'anneau de coordonnées $S_C := S/I_C$ est projectivement normal
$$S_C \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{H}^0\, \mathcal{O}_C(n)$$
et S_C est un S-module Cohen-Macaulay.

Scrolls

- Soit $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ de gonalité d et f un morphisme gonal. On définit
$$X := \bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} \overline{D_t},$$
avec $\overline{D_t}$ le sous-espace projectif engendré par $D_t := f^{-1}(t)$.
- La variété X est un scroll rationnel normal.
- C'est une fibration de $\mathbb{P}^1$ de fibres $\cong \mathbb{P}^{d-2}$ (Riemann-Roch géometrique)
- On a un diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} C & \subset & X \\ & f \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

Matrices 1-génériques et Scrolls

Proposition (Eisenbud) : *Soit M une matrice $2 \times n$ de formes linéaires 1-générique.*

- *Les mineurs de M définissent un scroll rationnel normal X de codimension $n-1$.*
- *La projection $X \to \mathbb{P}^1$ est donnée par le quotient des deux entrées d'une colonne quelconque de M.*
- *La résolution minimale de S/I_X est donnée par le complexe d'Eagon-Northscott de M, complexe linéaire de longueur $n-1$.*

Reste à "trouver" une matrice 1-générique dont les mineurs s'annulent sur C...

Stratégie : Les chercher *via* la résolution minimale de S/I_C.

Syzygies des courbes canoniques

Résolution projective et nombres de Betti

- Soit $(F_\bullet)$ la *résolution projective minimale* de S_C

$$0 \leftarrow S_C \leftarrow F_0 \leftarrow \cdots \leftarrow F_i \overset{f_i}{\leftarrow} F_{i+1} \leftarrow \cdots \leftarrow F_{g-2} \leftarrow 0$$

- Les S-modules libres

$$F_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S(-i-j)^{\beta_{i,i+j}}$$

  sont les modules des syzygies de C.

- Les nombres de Betti gradués $\beta_{i,j}$ peuvent se calculer en tensorisant la résolution de Koszul de $\mathbb{K}$ par S_C

$$\beta_{i,j} = \dim \mathrm{Tor}_i^S(S_C, \mathbb{K})_j.$$

Tables de Betti

- L'isomorphisme $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(1)$ induit une propriété d'auto-dualité

$$F_\bullet \simeq \mathrm{Hom}_S(F_{g-2-\bullet}, S(-g-1)).$$

- Il s'ensuit que la table des nombres de Betti de C est de la forme

$$\begin{array}{cccccc} 1 & - & - & & - & - & - \\ - & b_1 & b_2 & \cdots & b_{g-4} & b_{g-3} & - \\ - & b_{g-3} & b_{g-4} & \cdots & b_2 & b_1 & - \\ - & - & - & & - & - & 1 \end{array}$$

avec $b_i = \beta_{i,i+1} = \beta_{g-2-i,g-i}$.

En conséquent :

- L'ideal I_C est engendré par des quadriques et des cubiques.
- Les syzygies sont engendrées par des formes linéaires et des quadriques.

Exemple

Soit C une sextique plane à 4 noeuds. On a

$$g = \frac{(6-1)(6-2)}{2} - 4 = 6$$

La résolution minimale $(F_\bullet)$ du modèle canonique est de la forme

$$S \leftarrow S(-2)^6 \leftarrow S(-3)^5 \oplus S(-4)^5 \leftarrow S(-5)^6 \leftarrow S(-7) \leftarrow 0.$$

Autrement dit, C a pour table de Betti

$$\begin{array}{ccccc} 1 & - & - & - & - \\ - & 6 & 5 & - & - \\ - & - & 5 & 6 & - \\ - & - & - & - & 1 \end{array}$$

On appelle

$$(L_\bullet): \qquad S \leftarrow S(-2)^6 \leftarrow S(-3)^5 \leftarrow 0$$

le *sous-complexe linéaire* de $F_\bullet$ (non exact en général).

Colongueur et gonalité

Soit $L_\bullet \subset F_\bullet$ le *sous-complexe linéaire* de C. On définit la *colongueur linéaire* comme :

$$\ell(C) := length(F_\bullet) - length(L_\bullet)$$

La résolution $E_\bullet$ d'un scroll gonal est un sous-complexe linéaire de $F_\bullet$. Donc $E_\bullet \subset L_\bullet$ et on déduit

$$length(E_\bullet) \leq length(L_\bullet) \quad \Longrightarrow \quad gon(C) \geq \ell(C) + 2$$

Corollaire : Les courbes trigonales sont engendrées par des coniques **ET** des cubiques (Ce sont les seules à l'exception de la quintique lisse, Théorème de Petri).

Remarque : Si la conjecture de Green est vraie (relations nombres de Betti et séries linéaires spéciales), on a aussi :

$$\mathrm{gon}(C) \leq \ell(C) + 3.$$

Syzygies scrollaires

(*Travaux de Graff von Bothmer*)

Syzygies scrollaires

Soit $s \in L_p$. On note $V = V(s)$ le plus petit $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_{p-1} & \leftarrow & L_p \\ \cup & & \cup \\ V \otimes S(-p) & \leftarrow & S(-p-1) \cong \langle s \rangle \end{array}$$

Ce diagramme s'étend en un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} S & \leftarrow & L_1 & \leftarrow \cdots \leftarrow & L_{p-1} & \leftarrow & L_p \\ \uparrow \varphi_2 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \wedge^p V \otimes S(-1) & \stackrel{\phi}{\leftarrow} & \wedge^{p-1} V \otimes S(-2) & \leftarrow \cdots \leftarrow & V \otimes S(-p) & \leftarrow & S(-p-1) \end{array}$$

Proposition : *On a $\dim(V) \geq p+1$. Si l'égalité a lieu, l'idéal*

$$I_s := Im(\varphi_2 \circ \phi)$$

définit un scroll rationnel normal de codimension p qui contient C. On appelle ces syzygies de rang maximal des syzygies scrollaires.

Preuve proposition

- Si $dim\, V = p + 1$, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & S & \longleftarrow & S(-2)^{b_1} \\ & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \\ \wedge^{p+1} V \otimes S \cong S & \xleftarrow{\varphi_1} & \wedge^p V \otimes S(-1) & \xleftarrow{\phi} & \wedge^{p-1} V \otimes S(-2) \end{array}$$

où $\varphi_1 = (l_0, \dots, l_p)$ et $\varphi_2 = (m_0, \dots, m_p)$ sont des vecteurs de formes linéaires.

- La composition $\varphi_2 \circ \phi$ a pour entrée les mineurs de

$$\varphi := \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & \cdots & l_p \\ m_0 & m_1 & \cdots & m_p \end{pmatrix}$$

qui engendrent par définition l'idéal I_s. Clairement, $I_s \subset I_C$.

- Comme C est irréductible, on en déduit que φ est 1-générique. Ainsi, I_s est l'idéal d'un scroll rationnel normal de codimension $p + 1$. $\square$

Espace des syzygies scrollaires

Soit $\psi_p : L_p \to L_{p-1}$ la matrice des syzygies avec des entrées linéaires en les indéterminées $x = (x_0, \dots, x_{g-1})$.

Soit $y = (y_0, \dots, y_{\beta-1})$ de nouvelles indéterminées qui représentent $s \in L_p$ dans une base donnée. On a

$$\psi_p(x) \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{\beta-1} \end{pmatrix} = \Psi_p(y) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{g-1} \end{pmatrix}$$

pour une matrice $\Psi_p(y)$ à coefficients formes linéaires en y.

Lemme : *L'espace des p^{th} syzygies scrollaires est le sous-schéma*

$$Y_p \subset \mathbb{P}(\mathrm{Tor}_p^S(S_C, K)_{p+1}) \cong \mathbb{P}^{\beta-1}$$

d'idéal engendré par les $(p+2) \times (p+2)$ mineurs de $\Psi_p(y)$.

Preuve : On a $rang(s) = rang(\Psi_p(y))$. □

L'algorithme

Entrée : Une courbe canonique lisse C sur un corps $\mathbb{K}$.
Sortie : La gonalité et un morphisme gonal.

1. Calcule le sous-complexe linéaire $L_\bullet$ de C.
2. Soit $p := g - \ell - 2$. Tant que Y_p est vide faire $p := p - 1$.
3. On a $gon(C) = g - p$. Prend un point $s \in Y_p$ (extension de corps probable).
4. Calcule les morphismes φ_1 et φ_2 induits par s.
5. Retourne la restriction à C du quotient des premières entrées de φ_1 et φ_2.

Théorème : L'algorithme est correct.

Preuve. Découle des résultats précédents : $\mathrm{gon}(C) = g - p$, où p est le plus grand entier $\leq g - \ell - 2$ tel qu'il existe un p^{eme} syzygy scrollaire. $\square$

Exemple : la sextique plane à 4 noeuds ($g = 6$)

Le modèle canonique a pour table de Betti

$$\begin{array}{ccccc} 1 & - & - & - & - \\ - & 6 & 5 & - & - \\ - & - & 5 & 6 & - \\ - & - & - & - & 1 \end{array}$$

et pour sous-complexe linéaire

$$(L_\bullet) : \qquad S \leftarrow S(-2)^6 \leftarrow S(-3)^5 \leftarrow 0.$$

L'espace $Y_2 \subset \mathbb{P}^4$ des syzygies scrollaires de degré 2 est donné par les 4-mineurs d'une matrice 6×5 de formes linéaires.

On vérifie que Y_2 est union de 5 droites. Ainsi $\mathrm{gon}(C) = g - 2 = 4$, avec 5 morphismes gonaux.

Remarques :

- 4 morphismes gonaux pour les projections centrées aux noeuds et un autre pour le pinceaux des coniques passant par les noeuds.
- Le morphisme est défini sur une extension de degré 5 de $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, un morphisme gonal est définit sur $\mathbb{K}$ dans environ $\approx 63\%$ des cas (Schreyer).

Courbes gonériques

Definition

Définition : *On dit qu'une courbe est gonérique si*

- $gon(C) = \ell + 2$
- $b_{g-\ell-2}(C) = g - \ell - 2$

Autrement dit, le dernier nombre de Betti linéaire non nul coincide avec celui d'un scroll gonal (il est toujours supérieur ou égal).

Exemples :

- Les courbes trigonales sont gonériques.
- Une courbe générale de genre g n'est pas gonérique (Kempf).
- Si $char(\mathbb{K}) = 0$, une courbe générale dans la plus grande strate gonale de $\mathcal{M}_g$ est gonérique (Hirschowitz, Ramanan, Voisin).

Scrolls des courbes génériques

Proposition : *Une courbe générique a un unique morphisme gonal de scroll*

$$I_X = Ann(Coker(B)),$$

où B est la première matrice du second sous-complexe linéaire de C. On calcule alors $X \to \mathbb{P}^1$ avec une méthode type algèbres de Lie (Schicho et al).

Preuve : Soit $(\mathcal{E}_\bullet)$ la résolution de $\mathcal{O}_X$ et $d := gon(C)$. Par adjonction

$$\omega_X \cong \mathcal{E}xt^{g-d}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^{g-1}}),$$

on obtient une présentation

$$\mathcal{I}_X = \mathrm{Ann}(\omega_X) = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{coker}(\mathcal{E}^\vee_{g-d-1} \to \mathcal{E}^\vee_{g-d})\right).$$

Le foncteur sections globales est exact (X est ACM) et

$$I_X = \mathrm{Ann}(\mathrm{coker}(E^\vee_{g-d-1} \to E^\vee_{g-d})).$$

On a $E_{g-d} \cong L_{g-d}$ par hypothèse, d'où

$$\mathrm{coker}(E^\vee_{g-d-1} \to E^\vee_{g-d}) = \mathrm{coker}(L^\vee_{g-d-1} \to L^\vee_{g-d}) = \mathrm{coker}(B),$$

la seconde égalité basée sur l'auto-dualité de $(F_\bullet)$. $\square$

Un exemple

Exemple : La courbe plane $x_0^4x_2^5 + x_1^9 + x_1^2x_2^7 = 0$ a genre 10 et table de Betti

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & 28 & 105 & 168 & 154 & 70 & 6 & - & - \\
- & - & 6 & 70 & 154 & 168 & 105 & 28 & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & 1.
\end{array}$$

La projection du point (1:0:0) de multiplicité 5 induit un morphisme de degré 4 et $\mathrm{gon}(C) \leq 4$. Comme

$$\mathrm{gon}(C) \geq \ell + 2 = 4,$$

la courbe est 4-gonale.

Comme $b_{g-d} = b_6 = 6$ la courbe est gonérique et n'a pas d'autres morphismes gonaux.

L'unique scroll gonal a pour idéal $I_X = Ann(CokerB)$ où B est la matrice 6×70 de formes linéaires dans la seconde ligne. La table de Betti de X est :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & - & - & - & - & - & - \\
- & 21 & 70 & 105 & 84 & 35 & 6.
\end{array}$$

Conclusion

- Un algorithme de calcul des morphismes gonaux basé sur les syzygies des courbes canoniques.
- Complexité prohibitive en pratique : on n'a pas pu résoudre le système déterminantiel pour une courbe générale de genre $g \geq 7$.
- Une variante beaucoup plus rapide pour les courbes gonériques (facilement jusqu'à $g = 11$ sur un corps fini).
- Autre approche possible : utiliser la géométrie des singularités d'un modèle plan.
- Exemples et Packages *Macaulay2* ou *Magma* sur les pages web de Schreyer, Schicho et Weimann.