1 Introduction

L'infini c'est long, surtout vers la fin...

2 Une autre introduction

Je me rappelle...Il y a si longtemps que je sais alors seulement dire groumf. Je m'occupe du partage dans la tribu des groumf des hauts plateaux du limousinois, on m'appelle le mathematigroumf. Ma tribu me fout la pression car elle est soucieuse d'un partage équitable. A midi, on a cuisse de chevrouil grillée au menu. Comment les distribuer pour que tout le monde soit satisisfait J'ai l'intuition que pour cela, il faut que chacun en ait une. Comment faire ? Pas con, je commence donc à compter les groumfs :

"groumf, groumf, groumf,..., groumf."

Je m'aperçois vite que cette technique n'est pas la bonne. Autrement dit, je ne sais pas compter. A ce moment précis, comme toutes les grandes découvertes, on ne saurait expliquer sur le coup ni pourquoi, ni comment, mais une étincelle jaillit ! Un sage de la tribu me dit que c'est comme ça que l'on a découvert le feu, j'en profite d'ailleurs pour en allumer un. Je vais distribuer une cuisse de chevrouil à chacun, sans oublier personne. Ensuite je les récupère, je les fais cuire. Au moment du partage des cuisses de chevrouil grillées, Ô miracle, tout le monde a de nouveau une cuisse et une seule. Je me dis que le partage est équitable, puisque je peux vérifier la satisfaction de chacun de mes propres yeux. Je déduis de cette aventure palpitante :

"Il paraît naturel de penser qu'il y a *autant de* cuisses de chevrouils que de groumfs si je peux donner à manger une cuisse à chacun sans oublier personne."

Le lendemain, je refais la même expérience pour partager équitablement des cous de girafloïde. Tout le monde à l'air à nouveau satisfait. J'en tire à nouveau :

"Il paraît naturel de penser qu'il y a *autant de* cous de girafloïde que de groumfs si je peux donner à manger un cou à chacun sans oublier personne."

Répétant avec succés ce type d'expérience chaque jour (je le fis même avec des bijoux, qui eux ne se mangent pas), j'en vins à penser que ce concept était vrai pour tout type d'aliments, et même tout type d'objets. J'en fit part à la tribu :

"Je suis convaincu qu'il est naturel de penser qu'il y a *autant de* n'importes quelles choses que de groumfs si je peux associer une de ces choses à chacun d'entre nous sans oublier personne. Si vous admettez que mes réflexions sont vraies, cela veut dire que n'importe lequel d'entre nous est capable d'effectuer le partage dans la tribu en suivant ce postulat, ce qui rend mon travail inutile ; je n'ai plus qu'à suivre la règle sans avoir besoin d'intervenir. Il est d'ailleurs facile de vérifier que mon postulat est vrai, puisqu'on peut le tester chaque jour."

Bien plus tard, alors que je me trouvais par hasard dans les rues d'Alexandrie, je rencontre Euclidron, un bon ami grec. Alors que l'on regarde les étoiles, il me dit que l'on peut naturellement faire correspondre l'ensemble des jours de la semaine avec l'ensemble des astres alors connus.

A Lundi la lune ;
A mardi Mars ;
A Mercredi Mercure ;
A Jeudi Jupiter ;
A Vendredi Venus ;
A Samedi Saturne ;
A Dimanche le Soleil ;

Le point commun de ces deux ensembles est d'avoir *autant d'.Aéléments* l'un que l'autre. Je lui r.bépond que j'ai déjà utilisé cette idée chez les groumfs, il y a bien longtemps. Je lui fait part d'une question embarassante ? Combien y-a-t-il d'étoiles ? Sa réponse fût la suivante :

"il y a une quantité d'étoiles supérieure à n'importe quelle quantité que tu pourrais me proposer."

Je lui dit alors que c'est sans fin. Euclidion me répond qu'on ne peut pas savoir si c'est sans fin. Puisque l'on meurt un jour, on ne peut que compter des objets en quantité finie. Il me dit qu'il ne peut admettre que sa première réponse, puisque l'on peut la vérifier. Il suffit de compter une étoile de plus que la quantité proposée au départ pour s'en persuader. Cela me replonge dans mes souvenir du partage équitable. Il l'était car on pouvait le vérifier chaque jour. Vous me parlez de quelquechose qui est toujours plus que ce que l'on peut imaginer, mais vous ne voulez pas admettre l'infini, c'est bien cela ? Eh oui...Mais c'est énervant, il y asûrement une explication de cette quantité ! ! C'est à ce moment qu'un vieux qui fume sa chicha en regardant lui-aussi les étoiles me dit :

"Tu as l'air de vouloir tout contrôler, comme si l'inexplicable t'angoissait. Je crois que c'est la même chose pour beaucoup de monde. C'est pour cela que l'homme a besoin de Dieu. A partir du moment où Dieu existe, il n'y a plus de raisons d'avoir peur. Tout ce qui n'est pas en quantité finie est son oeuvre, tu es son oeuvre, tout est son oeuvre. Tu peux projeter ton ignorance dans son savoir infini. Dieu te protège, tu peux dormir en paix. Si tu veux que tes enfants dorment en paix eux aussi, fait en sorte que l'existence de Dieu leur soit une certitude...”

300 ans plus tard, je me réveille, avec une petite soif. Je décide d'aller boire un café à Jérusalem, un patelin pas trop loin. A la terrasse, je croise un jeune rebelle babacool anarchiste révolutionnaire. Tu crois en Dieu, je lui demande. Il me dit qu'il le connait bein puisque c'est son père. Je reste ahuri. Si le papy d'Alexandrie était là ! Ca y'est, notre croyance peut devenir une certitude grâce à ce jeune homme. Quel bonheur pour l'ex-mathématigroumf que je suis. Deux jours plus tard, je retrouve mon nouvel ami crucifié sur une croix au sommet de la colline. Je reste cloué sur place. Sa connaissance de Dieu nous aurait permis d'en savoir plus sur l'infini. Aurait-il donc géné Ponce Pilate,le mégalo du coin ? J'en déduis que les chefs politiques ont besoin de cultiver l'ignorance des gens et d'alimenter leur croyance pour se faire respecter et que ce fût pour lui une juteuse crucifiction. Dieu serait-il un concept plus politique que scientifique ? Je décide donc de ne plus croire en Lui. Je balaye d'un trait les certitudes du papy d'Alexandrie et je quitte le confort intellectuel dans lequel je m'étais endormi...Un grand vertige me saisi, mais l'espoir de mieux comprendre l'infini naquit...

Je ne savais pas que l'idée groumfière du “autant que” était en fait le début d'une longue histoire qui traverserait les siècles qui allait s'écouler aprés J.C, la Juteuse Crucifiction.

3 De l'infini à la crise des fondements

La notion .Aà priori simple de “autant que” sera mon point de d.bépart pour décrire l'évolution de la pens.Aée humaine dans le domaine de l'infini des nombres, l'infini arithmétique. Elle évite de savoir compter, il suffit de comparer.

Il y a autant de jours de la semaine que d'astres connus des anciens. On peut leur associer le nombre 7, ce nombre pouvant caractériser tous les ensembles ayant *autant d'éléments* que ces deux ensembles. Comment peut-on savoir si deux ensembles A et B ont autant d'éléments ? Une idée naturelle et intuitive est d'établir une correspondance entre ces deux ensembles (c'est à dire une application de A vers B qui à chaque élément de A associe un unique élément de B, ce que l'on appelle aussi une fonction de A vers B). Pour coller avec notre intuition de autant que, cette correspondance devra vérifier

- tous les éléments de B sont atteints (correspondance surjective).
- deux éléments de A ne sont pas envoyés sur un même élément de B

(correspondance injective).

Une correspondance surjective nous dit intuitivement que le premier ensemble a plus d'éléments (ou autant) que le second. Une correspondance injective nous dit au contraire que le premier ensemble a moins d'éléments (ou auntant) que le second. Une correspondance surjective et injective est dite groumfi.bère, ou plus moderne, bijective. D'aprés la théorie des groumfs, on a la définition suivante :

D.béfinition 1 *Deux ensembles ont autant d'élément l'un que l'autre s'il existe une bijection entre ces deux ensembles. On dit dans ce cas que deux ensemble ont la même taille où le même cardinal.*

Je me suis rendu ainsi compte que j'ai le m.Aême âge qu'il y a de lettres dans l'alphabet. En effet lorsque je suis né, mes parents nommaient les chèvres par la lettre M, l'année suivante par la lettre N, etcaetera. Aujourd'hui ils sont à la lettre L, l'alphabet est épuisé. A chaque lettre différente, il a correspondu une année de ma vie différente, toutes les lettres y sont passées et toutes les années de ma vie également. J'ai donc *autant d'années* qu'il y a de lettres dans l'alphabet. C'est un bon moyen de comparer sans se soucier des chiffres. On peut comparer ainsi des quantités beaucoup plus grandes. Il y a beaucoup plus de parties d'échecs différentes que d'atomes dans l'univers (d'aprés les théories cosmologiques actuelles). Si à chaque atome j'associe une partie d'échec différente, lorsque tous les atomes sont épuisés, il me reste encore un nombre gigantesque de parties à jouer.

Deux ensembles ont donc autant d'éléments si l'on peut mettre encorrespondance un .bà un les él.Aéments de l'un avec les éléments de l'autre. Cette notion constructive du “autant que” nous paraît à priori la plus naturelle et la plus intuitive qui soit . C'est à partir d'elle que des questions fondamentales se sont posées. Par exemple,

Question 1 *Le tout est-il plus grand que la partie ?*

Si j'enlève le Dimanche dans la semaine, tout le monde se rendra vite compte qu'il y a un jour de moins et que la semaine est devenue plus courte. Il ne reste que 6 jours, notament un de moins pour le repos. J'aurais pu enlever le Mercredi, mais le Dimanche est plus parlant. Je considère maintenant l'ensemble des nombres entiers naturels. C'est l'ensemble des nombres qui permettent de compter, d'énumérer. Je peux l'écrire $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, que l'on note plus brièvement $\mathbb{N}$. Je mets les points de suspension pour dire que cela ne s'arrête jamais, je prends en compte tous les nombres entiers naturels.

Cet ensemble est intuitivement infini. Je ne peux pas m'arrêter à un nombre n car le nombre $n+1$ est lui aussi dans la liste. J'enlève maintenant le zéro. La correspondance suivante

$$0 \to 1$$

$$1 \to 2$$

$$2 \to 3$$

$$....$$

est alors une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ privé de zéro. Avec notre définition intuitive, ces deux ensembles ont donc autant d'éléments. J'enlève un élément et j'en ai toujours autant ! ! Même mieux, je garde maintenant tous les nombres pairs $0, 2, 4, 6, 8, ...$ La multiplication par deux me donne à nouveau une bijection entre $0, 1, 2, 3, 4, ...$ et $0, 2, 4, 6, 8, ...$ A 0 j'associe 0, à 1 j'associe 2, à 2 j'associe 4, etc...Je garde un élément sur deux et j'en ai toujours autant. Ce paradoxe est notifié par Ibn Qurrat au XIVème siècle (apr.bés J.C., bien sûr). Quant à Galil.Aée (XVIIème), il constate en .bétudiant les lois de l'accélération qu'il y a autant de nombres que de carr.Aés. Les deux listes $0, 1, 2, 3, 4, ...$ et $0, 1, 4, 9, 16, ...$ peuvent être mises en correspondance bijective. La notion d'infini rend donc tout de suite trés méfiant, notre intuition est mise à l'épreuve. Comment le tout peut-il ne pas être plus gros que la partie ? Ce problème s'appelle le paradoxe de la réflexivité. C'est à priori un paradoxe car on n'imagine pas comment un sous-ensemble peut-être aussi gros qu'un ensemble qui le contient. Si j'en enlève, je dois forcément en avoir moins.

Ce type de problèmes explique sûrment pourquoi le concept mathématique d'infini a mis tant de temps à mûrir. Euclide, par exemple ne parlait pas d'une infinité de nombres premiers (nombre divisible seulement par 1 et par eux-mêmes). Il disait plutôt qu'il y a plus de nombres premiers que toute quantitée de nombres premiers proposée. Si par exemple $p_1, ..., p_k$ est la quantité de nombres premiers proposée, le plus petit diviseur du nombre $p_1...p_k + 1$ n'est pas dans la liste. Toute liste finie n'est donc jamais complète. Il ne dit pas pour autant que la liste est infinie.

Reconsidérer autrement le principe "le tout est plus gros que la partie" paraissait d'une audace insensée, et bien souvent on a pensé que seul un être infini, Dieu par exemple, pouvait penser l'infini. Saint Thomas d'Aquin disait que quiconque pensait pouvoir penser l'infini actuel se mettait en concurrence avec la nature unique et absolument infinie de Dieu (non mais des fois ! !).

La réponse de Hasdaï Crescas (XIVème) fût de dire que le concept du "autant que" ne s'applique pas aux ensembles infinis. C'est mieux que Dieu, mais .bça continue de limiter le d.Aéveloppement de la pensée dans cette direction. Ce principe du tout et de la partie, en fait pas trés utile en mathématiques empéchait tout progrés dans la compréhension de l'infini actuel (quand je parle de l'infini actuel, je parle d'une infinit.bé d'objets présents au moment présent).

Question 2 *D.Aés lors, comment donner une définition rigoureuse de l'infini ?*

Paradoxalement, c'est ce paradoxe qui va donner naissance à une définition mathématique de l'infini.

Il faut attendre pour cela l'audacieux philosophe mathématicien tchèque Bernhart Bolzano (1781-1848) et son ouvrage *les paradoxes de l'infini* publié 3 ans aprés sa mort, dans lequel il se permet d'établir des correspondances bijectives entre un ensemble et une de ses sous-parties, et ce sans s'en émouvoir. Il dit simplement que la notion "autant que" est valable pour les ensembles mêmes infinis, mais que le principe selon lequel le tout est plus gros que la partie ne s'applique pas toujours, notament pour les ensembles infinis. Il va même plus loin en disant que la mise en correspondance d'un ensemble avec une de ces sous-partie caractérise le fait qu'il est infini.

Un peu plus tard, le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916) finira de formaliser le concept d'infini. Il voit dans les paradoxes de Bolzano non unprobl.bème, mais il montre au contraire qu'ils permettent de donner une définition mathématiques rigoureuse et satisfaisante d'un ensemble de taille infinie :

D.béfinition 2 *Un ensemble est de taille infinie s'il a autant d'élément qu'une de ses sous-parties propres.*

Autrement dit la réponse à la question 1 est négative si et seulement si l'ensemble est de taille infinie. Comme souvent en mathématiques, l'émergence d'un paradoxe a donné naissance à une nouvelle théorie, voire même à une manière de repenser dans sa globalité le monde des mathématiques. Cette première définition des ensembles de tailles infinies héritée directement des travaux de Bolzano motive la création d'une théorie plus générale : la théorie des ensembles. Le mathématicien allemand Georg Cantor (18..,...) en fait une première ébauche en définissant un ensemble comme étant une collection d'objets réels ou abstraits munis d'une loi qui détermine leur appartenance à l'ensemble. La définition des premiers axiomes (propriétés intuitives que l'on admet parcequ'elles nous paraissent "naturellement vraies") concernant la définition des ensembles et de la loi d'appartenance, permettra de déterminer des propriétés mathématiques sur les ensembles parfois surprenantes. Notament c'est dans le cadre de cette théorie des ensembles que s'inscrit la définition d'un ensemble de taille infinie proposée par Dedekind. Cette définition rigoureuse offre donc à la fin du XIXème siècle un cadre nouveau dans lequel on peut se poser des questions. Cantor poussera ainsi plus loin l'étude des ensembles infinis et obtiendra des résultats surprenants, toujours à la limite du paradoxal ou du déraisonnable. Beaucoup de ses découvertes donneront naissance à de nouveaux théorèmes voire de nouvelles théories, dans d'autres directions, pourtant parfois déjà explorées depuis longtemps. C'est ce que je vais essayer d'illuster par la suite. Une des premières questions fondamentales que se posa Cantor fût la suivante

Question 3 *Y-a-t-il des infinis plus gros que d'autres ?*

Cette question vient naturellement en comparant la taille de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des fractions (appelées aussi les nombres rationnels) et l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. Entre deux éléments de $\mathbb{Q}$, il existe toujours un autre élément de $\mathbb{Q}$ (la moyenne de deux fractions est encore une fraction), ce qui n'est bien sûr pas le cas des entiers (aucun entier se situe entre deux entiers consécutifs). Cette propriété fait intuitivement penser qu'il y a beaucoup plus de rationnels que d'entiers. Cantor montre qu'il n'en ait rien en établissant une bijection entre ces deux ensembles par le principe assez simple (il suffisait d'y penser, comme toujours) dit de la diagonale.

Proposition 1 *Il y a autant de nombres entiers que de fractions.*

Cette réponse malmène à nouveau notre intuition. Mais alors y-a-t-il qu'une sorte d'infini ? Cela serait bouleversifiant ! Dieu revient au galop ! Don't worry, ça va s'arranger bienôt. Pour répondre à cette question Cantor s'intéresse à savoir s'il existe une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Cet ensemble peut se représenter par une droite. Les nombres réels peuvent représenter le temps qui s'écoule, continûment, sans accoup, alors que les nombres entiers s'assimilent au tic-tac de la pendule. C'est la différence entre tuuuuuuuuuuuuuu... et tu-tu-tu-tu. On rajoute aux nombres rationnels tous les nombres que l'on "peut" écrire avec un nombre fini de chiffres avant la virgule et une infinité de chiffres aprés la virgule (quelle infinité ? l'infinité que l'on connaît déjà, bien sûr, celle des entiers). Par exemple le nombre $\sqrt{2} = 1,414...$ n'est pas une fraction (je vous le prouve si vous voulez, c'est mignon) mais vit bien sur la droite des réels. De même le fameux nombre $\pi = 3,14159..$ est lui aussi sur la droite des réels. Il diffère du nombre $\sqrt{2}$ par le fait qu'il n'est pas algébrique, c'est à dire solution d'aucune équation polynômiale comme on le sait depuis Liouville (19..). Une autre différence caractéristique est le fait qu'il n'y a pas de séquence périodique dans la suite infinie de chiffres qui le compose contrairement aux nombres algébriques. C'est ce que l'on appelle un nombre transcendant ; bien sûr une autre question naturelle fût de savoir s'il y avait plus de nombres transcendants que de nombres algébriques.

Proposition 2 *(Cantor) Il n'y a pas de bijections possibles entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Autrement dit, l'infini des nombres réels est "plus gros" que l'infini des nombres rationnels.*

Il y a donc au moins deux infinis de tailles différentes. Ni le tic-tac ni le chrnomètre ne permettront jamais d'évaluer chaque instant avec exactitude. Il n'offrent qu'un découpage du temps et ne permettent que d'approcher l'instantané. L'inifini des nombres entiers s'appelle l'infini dénombrable et celui des nombres réels, l'infini du continu, ou le cardinal du continu. Cantor montre en fait mieux que cela, il montre que les nombres algébriques (solutions d'équatons "simples" dites polynômiales, tels $\sqrt{2}$ solution de $X^2 = 2$) sont en quantités dénombrables, c'est à dire en bijection avec l'ensemble des nombres entiers. Or, on montre facilement que la réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrables. Puisque la réunion des nombres algébriques et des nombres transcendants constitue les nombres réels, on en conclut *par l'absurde* qu'il y a une infinité "continue" de nombres transcendants, donc "beaucoup plus" que de nombres algébriques. Je récapitule :

"Entre deux nombres algébriques, il y a toujours un nombre algébrique et un nombre transcendant, entre deux nombres transcendants, il y a toujours un transcendant et un algébrique, mais il y a une infinité de fois plus de transcendants que d'algébriques. Ca c'est transcendant ! !"

Cette réponse à la question de la quantité des transcendants scandalisa grands nombres de mathématiciens pour la raison suivante : c'était une première dans l'histoire des mathématiques que l'on avait une preuve non constructiviste d'un théorème. Bien que l'on avait la preuve "classique" que certains nombre étaient transcendants (comme la transcendance de π, montrée par le français Joseph Liouville 30 ans plus tôt), la preuve par l'absurde de Cantor ne donne pas de moyens même théoriques de construire un nombre transcendant quelconque, ou de savoir si tel nombre l'est, et encore moins pour une infinité d'entre eux ! C'est une *preuve d'existence pure*. Le mathématicien allemand Leopold Kronecker (18..,19..), dont Cantor était l'élève fût le premier à s'insurger contre cette technique de démonstration. Comment peut-on être sûr de l'existence d'un objet si l'on ne connaît pas les étapes de sa construction ? Kronecker n'hésitera pas à attaquer personnellement Cantor, bloquant ses publications au journal de Crelle et allant même jusqu'à tenter de bloquer sa carrière en lui refusant des postes. Une citation de Kronecker illustrant son rejet des théories mathématiques concernant l'infini :

"les nombres entiers naturels sont l'oeuvre de l'homme, tout le reste est l'oeuvre de Dieu."

Ca vous rappelle quelquechose ? Mais c'est il y a 110 ans. La connerie a la vie dure... Cette crise s'accentue encore lorsque Hilbert répond, par des procédés similaires à ceux utilisés par Cantor par l'affirmative à une question brûlante de l'existence de certains objets finis mathématiques. Il soutient par là-même qu'il existe des objets finis que nul n'a jamais vu et que personne ne peut construire. Le mathématicien Gordon s'en écria : "ce ne sont plus des mathématiques, c'est de la théologie ! !" (Encore, décidément !) Ce fût le début de *la crise des fondements* de la fin du XIXème siècle. Les questionnements incessants de Cantor sur l'infini alimenteront cette crise. Aprés avoir vu qu'il y a deux infinis différents, Cantor se pose la question suivante

Question 4 *Y-a-t-il d'autres infinis encore "plus gros" que l'infini du continu ?*

Cette question amène Cantor à comparer par exemple l'infini de l'ensemble des points du plan (ou d'une surface carrée) avec l'infini de l'ensembles des points de la droite (ou d'un segment), point de départ d'un tas de réflexions dans d'autres directions que la théorie ensembliste. J'aborderai deux d'entre elles dans les deux chapitres suivants. Je vais d'abord montrer comment Cantor réussit de manière conceptuelle (opposée à la méthode plus constructive précédante) à répondre à sa question.

Proposition 3 *(Cantor) Tout ensemble a toujours strictement moins d'éléments que l'ensemble de ses sous-parties. Il y a donc une infinité d'infinis distincts que l'on peut ordonner dans la hiérarchie de la taille.*

Preuve : Je considère un ensemble E et l'ensemble $P(E)$ de ses sous-parties. Par exemple, pour $E = \{0, 1\}$ constitué de deux éléments, l'ensemble de ses sous-parties est $P(E) = \{, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ constitué de quatre éléments (attention, la loi d'appartenance pour E et $P(E)$ n'est pas la même). Pour montrer que E a strictement moins d'éléments que $P(E)$, il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'application f qui permet d'atteindre tous les éléments de $P(E)$ en partant des éléments de E (on dit surjective, je vous l'ai pourtant déjà dit). On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il en existe une et on montre que cela aboutit à une contradiction. Soit donc une application surjective

$$f : E \to P(E).$$

Je définis le sous-ensemble X de E (donc un élément de $P(E)$) suivant :

$$X := \{x \in E \; tels \; quex \notin f(x)\}$$

Puisque ma fonction est supposée surjective, cet élément X de $P(E)$ est atteint par f. Il a donc un antécédant dans E, c'est à dire un élément $t \in E$ tel que

$$f(t) = X.$$

Par définition de X, si t n'appartient pas à $f(t)$, il appartient à $X = f(t)$. On a simultanément appartenance et non appartenance. Ceci est absurde. Il n'existe donc pas de t tel que $f(t) = X$. L'élément X de $P(E)$ n'est pas atteint, la fonction f ne peut donc pas être surjective, ce qui prouve par l'absurde la proposition.

Mais alors, il suffit de considérer l'ensemble des parties de l'ensemble des parties d'un ensemble pour avoir un ensemble encore plus gros. A partir de n'importe quel ensemble infini E, on peut donc construire une suite d'ensembles infinis de plus en plus gros. En utilisant le symbole $<$ pour signifier strictement moins d'éléments que... on a la suite croissante d'infinis suivantes :

$$E < P(E) < P(P(E)) < P(P(P(E))) < ....$$

Cette découverte dans la théorie des ensembles aura de nombreuses répercussions fondamentales. Cantor introduit par exemple les nombres transfinis, extension des nombres usuels, pouvant eux-aussi être classés selon un certain ordre hiérarchique, caractérisant la taille des différents ensembles infinis. Il développa même une théorie arithmétique autour de ces "nouveaux nombres" permettant de les additionner, multiplier entre eux. (voir figure). Respirez un peu...

...Vous voyez pas un problème ? Vous peut-être pas, mais Cantor, oui. Sa proposition l'amène au paradoxe suivant :

"l'ensemble Ω de tous les ensembles n'est pas un ensemble"

Sinon, l'ensemble $P(\Omega)$ des parties de cet ensemble qui doit appartenir par définition à Ω serait strictement plus gros que Ω ce qui est absurde. D'autres paradoxe du genre issus de la théorie des ensembles émergent à cette même époque. Par exemple le célèbre paradoxe du barbier donné par Russel :

"le barbier qui rase seulement ceux qui ne se rasent pas eux-même doit-il se raser ?"

Ces questions que certains trouvaient embarassantes (et d'autres s'en foutaient beaucoup plus puisqu'elles n'empéchaient pas de faire des maths) accentueront la crise des fondements. Comment faire des mathématiques raisonnablement sans souffrir de telles abérations ? Ceci amènera David Hilbert (et bien d'autres bien entendu) à vouloir réaxiomatiser les mathématiques, pensant que le monde des maths ne pouvaient souffrir de paradoxes. Il invente pour cela un nouveau formalisme qui donnera naissance à la théorie de la preuve et l'étude de la logique comme science à part entière, une sorte de métamathématique. Avec ce nouveau formalisme d'enchainement de symboles abstraits combinés selon les lois de la logique, les deux paradoxes précédants disparaissent et on l'a vu amèneront à des découvertes d'objets que l'on ne peut ni voir ni construire grâce à des *preuves d'existence pure* (ils disparaissent car ils ont la particularité d'être autoréférends, ce que le formalisme de Hilbert n'autorise pas. Aprés la mort de Kronecker en 1891 et devant la puissance du raisonnement formaliste de Hilbert qui donnèrent en quelque sorte naissance aux mathématiques modernes, les critiques s'estompèrent. Elles reprirent en 1907 avec le mathématicien hollandais Luitzen Brouwer qui réaffirma avec vigueur que les mathématiques perdraient tout leur sens si l'on ne faisait pas de distinction nette entre l'existence réelle ou constructiviste, et l'existence pure. Deux courants mathématiques en résultèrent : le courant intuitionniste (basé sur l'intuition et donc la constructibilité des objets) de Brouwer, dans la lignée de Kronecker, et le courant formaliste (autorisant par exemple le raisonnement par l'absurde) dans la lignée de Cantor et Hilbert. Ces deux courants coïncidaient dans le domaine du fini (quand c'est fini, on peut toujours construire un objet avec un nombre fini d'étapes), mais se distinguent dans le domaine de l'infini, notament à propos de la loi du "tiers exclu".

La loi du tiers exclus est la logique d'Aristote selon laquelle toute proposition mathématique est soit vraie, soit fausse. Elle est obligatoire pour se permettre de raisonner par l'absurde. Tout le monde est persuadé du bien-fondé de cette loi. Dans un sac de pommes, soit il y a une pomme rouge soit il n'y en a pas. Pour en être persuadé, je vide le sac. Je n'ai pas d'autres *constatations* possibles que "il y a une pomme rouge" ou "il n'y en a pas", ce qui confirme par la pratique le principe du tiers exclus. Ce n'est plus possible si l'on suppose que le sac contient une infinité de pommes , puisque l'on ne peut plus vider le sac en un temps fini pour s'en assurer. Un choix doit se faire : ou bien l'on suppose que l'axiome vrai dans le domaine du fini s'extrapole dans le domaine de l'infini et on l'utilise (mathématiques formelles de la preuve pure), ou bien on le refuse et on cherche des preuves constructibles (mathématiques intuitionnistes). Les mathématiques intuitionnistes n'admettant que l'existence constructible de certains objets, elle sont beaucoup plus dures à mettre en place. Je vais éclairer cela sous l'exemple des nombres réels constructibles.

Je dirai qu'un nombre est constructible si j'ai un algorithme qui permet de connaitre ses décimales aussi loin que je me fixe à l'avance. Par exemple, $x = 1 = 1,0000...$ se définit par la seule phrase "que des zéros aprés la virgule". Si je définis maintenant le nombre $z = 0$ si tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture de Goldbach, non démontrée à ce jour) et $y = \frac{1}{10^n}$ où n est le plus petit entier pour lequel $2n$ n'est pas somme de deux nombres premiers sinon. Ce nombre est constructible. Si je veux connaître ses 100 premiers chiffres, il me suffit de savoir si les nombres pairs $0, 2, 4, ..198, 200$ sont sommes de deux nombres premiers ou pas, ce que l'on peut vérifier en un nombre fini d'étapes. Je considère maintenant le nombre $z = x - y$. Est-il constructible ? Non puisque je ne peux même pas connaître sa première décimale : si la conjecture de Goldbach est vraie, $z = 1$, sinon $z = 0,9999...999000...$ où le nombre de neuf correspond au plus petit n pour laquelle la conjecture est fausse. Ce critère de constructibilité n'est donc pas satisfaisant ; si la différence de deux nombres constructible ne l'est pas forcément, on ne peut pas espérer faire des calculs convenables avec cette approche. Il existe cependant une théorie constructiviste satisfaisante des nombres réels grâce à l'approximation par les nombres rationnels. Les théories constructivistes se sont vite avérées trés dures à mettre en place pour faire évoluer les mathématiques, aussi la rigueur du formalisme est devenu et resté le moteur principal de la pensée mathématique, et l'intuitionnisme, plutôt une curiosité mathématique désuète. Cependant, une fois de plus, ce qui ne sert pas dans un domaine peut s'avérer utile dans un autre, et les mathématiques constructivistes furent à la base de l'informatique, puisque l'on ne peut manipuler avec un ordinateur qu'un nombre fini d'informations, c'est à dire des objets définissables en un nombre fini d'étape. Cependant, Alan Turing, dans son article fondateur de la théorie informatique eut bien du mal à mettre en place ces nombres qu'il appellait calculables, puisqu'il s'aperçut quelques mois plus tard que la définition qu'il leur avait donné ne lui permettait pas de faire des opérations satisfaisante, comme dans l'exemple illustré ci-dessus. Une nouvel essor de la théorie constructiviste eut lieu à partir de 1967 avec le mathématicien Eric Bishop. Sa philosophie n'est plus de refonder les mathématiques, mais de développer une nouvelle branche, plus réaliste. Il fût plus gourmand que ses prédecesseurs pour définir un nombre constructible. Un nombre est constructible si l'on peut l'approcher avec une précision aussi grande que l'on veut ce nombre par des nombre rationnels *en un nombre fini d'étapes*. On obtient ainsi des nouvelles bizarreries. Par exemple, on ne peut plus décomposer l'ensemble des réels constructibles en deux parties non vide sans éléments en commun ! ! Cette notion du constructivisme est encore au goût du jour bien qu'assez peu développée. Elle ne doit plus être mise en concurrence avec le formalisme usuellement utilisé depuis un siècle en mathématiques (Einstein disait que c'était une querelle de chien et chat qui n'a pas raison d'être). Les mathématiques constructivistes modernes sont devenues ainsi une autre branche des mathématiques qui pourrait s'avérer trés utile aussi bien en informatique qu'en biologie ou en physique, ces deux dernières science étant des sciences de l'approximation puisque la mesure exacte n'existe pas et ne peut pas exister avec les théories quantiques actuelles. Mais revenons au début du siècle et au programme formaliste d'Hilbert qui se voudrait créer une science mathématique qui ne souffre d'aucun paradoxe.

Ce rêve de Hilbert ne durera qu'une trentaine d'années. Il s'effondrera définitivement en 1931 quand le logicien allemand Kürt Gödel prouva que son programme formaliste était voué à l'échec, avec le théorème d'incomplétude des mathématiques. Grossièrement, ce théorème dit qu'il n'existe aucune métamathématique qui permet de démontrer qu'un système d'axiomes est cohérent. Dans le meilleur des cas on peut montrer qu'il est incohérent, c'est tout. Quel que soit le formalisme utlisé, avec des règles de logiques vérifiant certains critères de cohérence, on fabrique un univers mathématique dans lequel il y a soit des paradoxes, soit des propositions indécidables, par exemple qui peuvent être aussi bien vraies que fausses, sans que cela ne remette en cause ce qui était déjà établit. C'est un bouleversement dans la communanuté des mathématiciens. Pour ma part, ce fût un soulagement d'apprendre qu'il n'existe aucun monde parfait, même pas un monde issu de notre imagination. Quand bien même serait-on des robots obéissant rigoureusement à des lois simples, des incohérences se produirait inévitablement, conduisant à un certains chaos. Bien sûr, les logiciens continuent de réfléchir...Une nouvelle théorie de la logique est en train de voir le jour, celle de la *logique floue* ; c'est une théorie plus probabiliste et moins cartésienne que les règles de logique de Gödel. Dans ce nouveau cadre mathématique, une propriété est autorisée à être vraie avec un certains pourcentage de chance et fausse avec le pourcentage complémentaire. On est obligé d'introduire une certaine souplesse dans la logique pour faire avancer les raisonnements. C'est à rapprocher bien sûr de la physique quantique. Depuis le principe d'incertitude d'Heisenberg qui affime que l'on ne peut pas connaître avec exactitude simultanément la position et la vitesse d'une particule de masse trés petite (un électron, par exemple). On fait donc maintenant de la physique probabiliste, dite quantique. On estime la zone la plus probable dans laquelle vit la particule. Comme si l'exactitude devait disparaître pour faire avancer la connaissance de l'univers. Et les théories politiques alors ? ?

Quoi qu'il en soit, la théorie des ensembles, l'utilisation de la preuve pure et le formalisme hilbertien continuèrent et continuent d'offrir un cadre satisfaisant dans lequel faire des mathématiques de nos jours encore et c'est dans ce contexte que la plupart des mathématiciens sont formés et orientent leurs recherches depuis la fin du XIXème siècle. Revenons donc aux obsessions de Cantor. Aprés avoir trouvé une hiérarchie dans les tailles des infinis, il prouva assez facilement que l'infini le plus petit était l'infini dénombrable, l'infini des nombres entiers, celui qui permet d'énumérer. Une question terrible lui vint à l'esprit :

Question 5 *(l'hypothèse du continu) Existe-t-il un infini strictement compris entre l'infini dénombrable et l'infini du continu ?*

La réponse par la négative à cette question s'appelle *l'hypothèse du continu*. C'est sur cette question que Cantor butera toute sa vie. Son combat avec ses opposants l'affaiblirent considérablement et des crises dépressives de plus en plus longues et fréquentes s'emparent de lui. Ne pas réussir à confirmer l'hypothèse du continu participa sûrement trés largement à ses crises de schyzophrénie et il passera la plupart de ese quinze dernières années à l'hôpital psychiatrique. Lorsque son "ennemi" et ancien directeur de thèse Kronecker le sut, il dit simplement :

"Mais cela est normal, c'est là qu'il devrait-être depuis longtemps."

Si vous croyiez à un humanisme et une ouverture d'esprit des mathématiciens plus larges que la moyenne, et bien n'y croyez plus. L'hypothèse du continu fit couler une quantité d'encre considérable. Cantor cru un moment avoir trouvé un ensemble compris "entre" le dénombrable et le continu : l'ensemble trés connu sous le nom de l'*ensemble triadique de Cantor*. Cet ensemble semblait répondre à la question : d'un côté il paraissait ridiculement petit car on peut l'enfermer dans un intervalle arbitrairement petit (on dit qu'il est de mesure nulle) ce qui le rapproche de l'ensemble des fractions, mais d'un autre côté, il n'était pas dénombrable, ce qui le rapproche des réels. Malheureusement pour Cantor, cet ensemble avait le cardinal du continu. Il fût malgré tout trés étudié pour ses drôles de particularités, notament pour définir ce qu'étaient les intégrales. L'hypothèse du continu fût énoncée comme premier problème de la célèbre liste des 23 problèmes énoncée par Hilbert en 1900 au premier congrés de mathématiques international à Paris. Malheureusemenr pour Cantor et ses successeurs, les travaux pour infirmer ou confirmer l'hypothèse du continu étaient perdus d'avance, et pour cause : le logicien américain P.Joseph Cohen trouve enfin en 1963 la réponse fracassante à cette question :

Proposition 4 *(Cohen, 1963) Il est impossible de répondre à cette question. L'hypothèse du continu est indécidable dans la théorie des ensembles et la théorie de la logique actuelle.*

Autrement dit, dans le cadre mathématique de la théorie des ensembles actuelle, cela n'a absolument aucune conséquence que la réponse à cette question soit vraie ou fausse. C'était un des premiers exemples concrets, et lequel, qui illustrait le théorème d'incomplétude de Gödel. Bien sûr rien ne nous empêche d'imaginer un nouveau cadre mathématique dans lequel cette hypothèse aurait son importance, mais pas le cadre actuel dans lequel presque tous les mathématiciens travaillent.

Je vais me permettre un nouvel intermède pour illustrer la facon de savoir si une proposition peut-être démontrée ou pas. Cela concerne un problème de nature bien différente, celui de savoir si le 5ème postulat d'Euclide affirmant que

"par tout point du plan, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée"

(que l'on trouve énoncé sous une forme différente dans *Les élements d'Euclide*) est oui ou non un axiome pour définir la géométrie euclidienne. Peut-on démontrer cet axiome à partir des 4 premiers axiomes (auquel cas cela serait une proposition) ou au contraire constitue-t-il un réellement un axiome. Cette question intéressa beaucoup de grands mathématiciens. Karl Friedriech Gauss au début du XIXème siècle fût sans doute le premier à se dire que l'on ne pouvait pas donner de réponse à cette question. Quelques temps plus tard, Lobatjevsky invente une nouvelle géométrie dans laquelle la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180 degrés, la géométrie dite hyperbolique. Elle mit un terme à la question. Dans cette nouvelle géométrie, les quatre premiers axiomes d'Euclide étaient vrais mais plus le 5ème, puisque dans cette géométrie il passait par un point une infinité de droites parallèles à une même droite, ce qui prouva son indépendance. Le 5ème postulat d'Euclide était bel et bien un axiome utile pour caractériser la géométrie euclidienne. Cependant on pouvait le modifier et obtenir de nouvelles géométries, comme par exemple la géométrie hyperbolique ou la géométrie riemanienne (somme des angles d'un triangle supérieur à 180°) qui trouva elle son utilisation dans la description de l'espace-temps d'Einstein. C'est ce type de raisonnement qui conduisit Cohen à la découverte de l'indécidabilité de l'hypothèse du continu, où cette fois, il prouve qu'enlever ou ajouter cette hypothèse ne change rien à la théorie des ensembles. Martin, tu t'écartes encore de ton sujet... Encore que, l'infini est encore présent, puisqu'il existe une géométrie où les droites parallèles se coupent à l'infini, la géométrie projective. Revenons aux questionnements incessants de Cantor à propos de l'infini....

Question 6 *Est-ce que l'infini du carré (donc une surface, dimension 2) est plus grand que l'infini du segment (donc une courbe, de dimension 1) ? Plus généralement, est-ce qu'il y aplus de points dans le plan que sur la droite ?*

Le 20 Juin 1877, il écrit à son ami Dedekind (surtout pas à Kronecker !) que "bien qu'opposé à l'opinion généralement répandue", il sait "depuis des années que la réponse est non". Ces deux ensembles ont autant d'éléments ! Cantor était pourtant persuadé que ses recherches l'amèneraient à la réponse opposée. Il est intuitif que deux espaces de dimensions différentes n'aient pas la même infinité d'éléments. Il n'en ait rien ! Toujours avec son principe de la diagonale, Cantor trouve à sa grande surprise qu'il existe une application M surjective du segment $[0,1]$ sur le carré $[0,1]\times[0,1]$. A un point du segment il associe un point du carré et il recouvre ainsi tout le carré. L'application est simple, elle associe au point $0,a_0a_1a_2a_3....$ du segment le point de coordonnées $(0,a_0a_2a_4...,0;a_1a_3a_5...)$ du carré. Cette application est surjective (exercice). Dedekind répond en faisant remarquer que cette fonction n'est pas bijective car pas injective : deux points peuvent avoir la même image. Par exemple le point $0,5000...$ a pour image le point $(0,5;0)$ et le point $0,40909090...$ a pour image le même point $(0,4999...;0)=(0,5;0)$.

N.B :

$$si\ \ x=0,49999...\ \ alors\ \ 10x-x=4,9999...-0,49999...=4,5000...=4,5$$

$$Donc\ \ 9x=4,5\ \ soit\ \ x=0,5.$$

Cependant, on peut modifier cette application pour la rendre bijective. On peut facilement généraliser ce résultat. Puisqu'il y a aussi une bijection entre le carré et le plan tout entier (il suffit de le dilater à l'infini), et qu'il y a une bijection entre chacune des droites du plan avec un nouveau plan, on en conclut qu'il y a autant de point sur un bout de fil de 1mm de long que dans l'univers tout entier (qu'il soit infini ou non). Ce résultat pour le moins surprenant amènera à une réflexion intense et conduira d'un côté à la théorie des courbes qui remplissent l'espace et d'un autre côté au théorème du point fixe de Brower (à ne pas confondre avec Browser, puisque le théorème du point fixe est le parfait exemple d'existence non constructive en général). Ces différents résultats ont aujourd'hui de nombreuses applications primordiales en informatique ou en économie pour ne citer qu'elles. Décidément les questions les plus abstraites et les plus farfelues mènent à tout, ce qui est un semblant de réponse à la question obsédante pour un mathématicien : "les maths, à quoi ça sert ?"

4 De l'infini aux courbes qui remplissent l'espace

Cette section s'articule autour d'un article publié dans *pour la science* de Jean-Pierre Delahaye, Professeur d'informatique à Lilles.

Je l'ai déjà dit, mettre en correspondance un à un les points de deux espaces de dimensions différentes sans oublier personne paru surprenant pour un grand nombre de mathématicien. On compara alors cette bijection à celles qui permettent de passer du segment (dimension 1) à la droite (dimension 1) pour trouver des différences avec la bijection de Cantor. Dans le cas de la dilatation, si on considère deux points trés proches (aussi proches que l'on veut) sur la droite, on peut trouver deux points trés proches sur le segment qui s'envoient sur les deux points précédants. Elle n'éparpille pas le segment n'importe comment sur la droite, mais elle transporte les voisinages du segment vers les voisinages de la droite. La fonction est dans ce cas dite continue. Elle conserve la topologie des objets, elle transporte la notion "être prés de" du segment vers la droite. Une question primordiale qui se posait alors naturellement fut celle de savoir s'il existait une bijection continue entre le segment et le carré, c'est à dire savoir si l'on pouvait remplir le carré avec une courbe continue sans jamais passer deux fois par le même point. La communauté scientifique fût "rassurée" lorsqu'Eugène Netto (1848-1919) prouve qu'*il n'existe pas de fonctions continue et bijective du segment vers le carré*. En fait il prouve qu'une telle fonction conserve nécessairement la dimension des espace, comme par exemple la dilatation ou le rétrécissement. Mais des questions demeurent...

Question 7 *Existe-t-il une fonction continue et surjective du segment vers le carré ?*

Autrement dit, peut on remplir le carré avec une courbe passant éventuellement en l'autorisant à âsser plusieurs fois par le même point ? Si l'on suppose que le segment représente le temps qui s'écoule en une seconde (ou une heure, peu importe, mais un temps fini), une telle courbe est assimilable au mouvment d'un point. En un temps fini, peut-on parcourir tout le carré sans sauter mais en repassant éventuellement sur ses pas. A nouveau on était persuadé intuitivement de l'impossibilité de ce phénomène. Or Giuseppe Peano (1858-1932) rentre alors sur scène et découvre une courbe qui répond à la question, courbe qui porte aujourd'hui son nom, dans un article publié en 1890. Elle est définie comme une limite de courbe, le passage à la limite ne préservant pas toujours la continuité. Ici, si ! Il construit des courbes $P_0, P_1, P_2, .., P_n, ...$ qui "s'agitent de plus en plus sans oublier le moindre espace et la courbe limite recouvre le carré. Ce qui est ahurissant que chaque courbe a une aire nulle, mais la courbe limite non. On peut essayer d'imaginer les mètres d'ADN recroquevillés sur eux mêmes donnant naissance à des chromosomes de volumes non nuls (ici on triche car un fil d'ADN a une épaisseur non nul, contrairement à une courbe mathématique). La courbe de Peano a la propriété d'être presque bijective : elle passe plusieurs fois par une infinité de points, mais une infinité dénombrable alors que les points visités qu'une fois sont en quantité infinie continue. La longueur de cette courbe est bien sûr infinie. Même mieux : deux points quelconques de la courbe sont à une distance infinie l'un de l'autre.

Question 8 *Une particuke de notre monde physique peut-elle suivre le mouvement décrit par la courbe ?*

Non, car on ne peut trouver nulle part de tangentes à la courbes, ce qui rend impossible de définir une vitesse instantanée. C'est un résultat récent de Hans Sagan en 1990. Il dit en fait que la particule changerait de direction une infinité de fois entre deux temps même trés rapprochés, ce qui demanderait une énergie infinie pour la contrôler. Il n'y a donc aucun espoir de trouver ce phénomène dans la nature. De même, Hilbert et Moore construisirent des courbes qui remplissent le cube et qui s'adaptent aux dimensions plus grandes contrairement à celle de Peano.

Question 9 *Existe-t-il une courbe recouvrant le carré admettant des tangentes ?*

Le français Lebesgue (1875-1941) célèbre entre autre pour sa théorie de la mesure résoud par l'affirmative cette question. Il construit une courbe (la courbe de Lebesgue) presque partout dérivable sauf sur l'ensemble triadique de Cantor. On pouvait donc imaginer définr une vitesse à une particule décrivant cette courbe en "presque tous" les points. Cependant ce n'était toujours pas possible puisque l'on a à nouveau besoin d'une force infinie pour que la particule reste sur la courbe aprés être passée par un mauvais point.

Question 10 *Peut-on recouvrir une surface quelconque par une courbe continue qui ne passe jamais par le même point ?*

En 1894, William Osgood (1864-1943) montre que la réponse est oui à condition que la surface soit d'aire strictement plus petite que 1, donc pas le carré. Cela ne contredit pas le résultat de Netto, puisqu'ici, la topologie de lasurface en question n'est pas héritée de celle du plan, mais de celle de la courbe.

Ces questions, totalement abstraites et résolues souvent "pour l'honneur de l'esprit humain" (citation dans une lettre de Jacobi à Legendre, en 1830) ont amené, comme bien souvent, à des utilisations bien plus tardives dans d'autres disciplines que les mathématiques. L'idée reprise ici fût de placer le mieux possible (le mieux possible correspondant par exemple à la notion de continuité) dans peu de place des informations concernant un espace plus gros. Par exemple, certaines des courbes précédantes ont été proposées pour l'élaboration d'antennes. D'autres courbes sont utilisées pour stocker sur une bande magnétique (qui est de dimension 2) des informations concernant chaque point d'un espace de dimension plus gros, tout en optimisant le temps de lecture. L'informatique, comme la physique et aujourd'hui la biologie semblent avoir soif de résultats mathématiques abstraits pour pouvoir avancer. L'informatique ne doit donc pas "tuer" les mathématiques fondamentales et abstraites, puisqu'elle les rendent au contraire indispensables.