1 Introduction

Dans le cadre des leçons de mathématiques d'aujourd'hui, je vais m'attacher à faire un exposé accessible à tout le monde. La théorie des systèmes hamiltoniens intégrables est une théorie trés vaste dont on pourrait parler pendant plusieurs heures. Elle s'intéresse à certains type de système différentiels issus de la mécanique classique qui se situent à la croisée de chemins variés : géométrie algébrique, représentation des algèbres de Lie, systèmes dynamiques (puisque l'on traite des équation différentielles [1]).

Cette théorie présente donc beaucoup d'aspects intéressants ; je vais me limiter ici à une petite partie. Je vais expliquer ce qu'est un système intégrable, puis traiter deux exemples pour lesquels on peut utiliser la géométrie algébrique pour étudier ce genre de système. Je ne m'intéresserai donc pas ici à l'aspect dynamique mais plutôt aux aspects faisant intervenir l'utilisation de la géométrie algébrique réelle.

Peut-être y en a t-il parmis vous qui ne croient ne pas savoir ce qu'est un système intégrable. Ils ont tort car ils savent ce que c'est ; j'en ai apporté un qui est l'exemple que je connais le mieux et dont je vais parler aujourd'hui : le cas de la toupie. Je vous propose donc ici une expérience mathématique...

FIG. 1 – toupie en mouvement

La toupie a un mouvement assez compliqué. Elle est sujette à trois mouvements (forces ?) distincts :

- la rotation ;

[1] l'étude des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui traite des informations qui évoluent (par exemple au cours du temps) et qui s'intéresse aux invariants au cours de cette évolution. Par exemple une équation différentielle représente une évolution et on cherche des quantités qui évoluent de cette manière.

- la précession ;
- la nutation.

C'est un exemple de solide avec un point fixe dans un champs de gravitation, c'est à dire que l'on considère que le point de contact de la toupie avec la table est fixe (point O sur la figure). La toupie étant un solide rigide, l'autre extrémité de son axe se promène sur une sphère de centre O. Pour expliquer les mouvements de précession et de nutation, j'utilise un autre exemple de toupie : la Terre.

FIG. 2 – la Terre en mouvement

Elle est animée elle aussi de ces trois mouvements :

- la rotation autour de l'axe ;
- la précession de l'axe : ce mouvement est à l'origine du phénomène de précession des équinoxes[2] ;
- la nutation : l'axe de la Terre ne se promène pas sur un seul cercle mais oscille autour de ce cercle. C'est en astronomie ce que l'on appelle la théorie du ? ? qui se promène sur la Terre. Ainsi, le cercle polaire n'a pas toujours été et ne restera pas à la lattitude à laquelle il est aujourd'hui, ni le tropique du capricorne qui oscille autour de la lattitude 23 degrés.

Le mouvement est représenté trés accentué sur la figure. La précession n'a pas lieu sur un cercle mais oscille entre deux cercles parallèles. On peut le voir sur certaines toupies. C'est ce phénomène que l'on appelle la nutation.

[2] Les équinoxes correspondent au moment de l'année où la durée du jour est égale à celle de la nuit. Ils se situent actuellemnt autour du 21 Mars et du 21 Septembre. Le mouvement de précession fait que la date des équinoxe évoluent au cours du temps. Ils seront inversés aprés une période de ? ? années lorsque l'extrémité de l'axe de la Terre aura parcouru un demi-cercle : l'hiver aujourd'hui sera alors l'été dans ? ? ans et vice-versa.

La géométrie algébrique réelle va nous permettre d'expliquer ce mouvement de nutation. Pour décrire le mouvement, on utilise les lois de la physique classique.

FIG. 3 – solide avec un point un fixe dans un champs constant

On se donne un solide, son centre de gravité, un point fixe et un champs constant qui agit sur ce solide : c'est ici la pesanteur, représentée par le vecteur de gravitation Γ qui est constant dans le repère fixe. Cependant, je vais écrire les équations liées au mouvement dans le repère mobile lié au solide, donc dans lequel Γ varie. On note par M le moment angulaire[3]. Si vous ne comprenez pas la physique, n'ayez pas d'inquiétude, vous comprendrez la suite dans quelques instants.

On écrit les équations dans le repère lié au solide et on regarde comment varient les vecteurs M et Γ au cours du temps. Le fait que le champs Γ soit constant dans le repère fixe se traduit par l'équation :

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \quad (1)$$

où $\dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{dt}$ et Ω est le vecteur rotation instantanée. De la même manière, M est lié au temps par l'équation

$$\dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L \quad (2)$$

où $\dot{M} = \frac{dM}{dt}$ et $L = \vec{OG}$. Le terme supplémentaire $\Gamma \wedge L$ (constant dans le repère fixe) est lié à la force qui s'exerce. Les équations (1) et (2) sont appelées les équations d'Euler-Poisson. On peut par exemple consulter le livre de Lagrange (réf ?) à ce propos. Les vecteurs M et Ω sont de plus liés par une équation du type :

[3]Le moment angulaire est...

$$M = J\Omega$$

où J est une matrice symétrique définie positive qui décrit la forme du solide, la *matrice d'inertie.*

A ce sujet une remarque : c'est en étudiant cet objet que Lagrange a eu besoin de diagonaliser la matrice. C'est ainsi qu'il a sans doute été montré pour la première fois que toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée ; comme quoi la mécanique mène à tout...

On remarque tout de suite quelquechose d'intéressant à propos de ce système différentiel : certaines quantités sont préservées (même dans le repère mobile) au cours du temps. Par exemple, on a ici :

$$\left\{ \begin{array}{c} \|\Gamma\| = \\ \text{Constante} \\ M.\Gamma = \\ \text{Constante} \end{array} \right.$$

De ce fait, les équations vues à priori dans $\mathbb{R}^6$ peuvent se résoudre en travaillant dans un espace de dimension 4 (les conditions précédantes faisant chuter de 2 la dimension), ce qui est déjà mieux. Puisque l'on fait ici de la mécanique conservatrice, une autre quantité trés importante est conservée : l'énergie totale du système. Cette énergie H s'écrit

$$H = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L\,;$$

le premier terme représente l'énergie cinétique et le deuxième l'énergie potentielle.

A ce stade, les observations immédiates s'arrêtent pour un solide quelconque avec un point fixe, mais puisque je suis venue à Bordeaux pour parler plus longtemps, je continue en m'intéressant maintenant au cas de la toupie.

La toupie a une *symétrie de révolution* qui se traduit par le fait que la matrice d'inertie a deux valeurs propres identiques (positives) que l'on prendra égales à 1. Cette matrice s'écrit donc dans ce cas :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où le troisième vecteur colonne représente l'axe de symétrie de la toupie. La propriété symétrique de la toupie implique également la conservation du moment par rapport à l'axe.

En résumé, j'ai pris un système mécanique simple, j'ai écrit les équations qui régissent son mouvement et j'ai constaté qu'il y avait beaucoup de quantités conservées. Ce sont ces quantités que l'on appellera des *intégrales premières*. On verra tout à l'heure qu'un système sera dit intégrable s'il possède suffisament de telles quantités conservées. Avant de donner la définition d'un système intégrable, je veux vous montrer l'intervention de la géométrie algébrique dans le cas de la toupie. La conservation de l'énergie et du moment par rapport à l'axe permettent de décrire le mouvement de la toupie par la seule équation différentielle :

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(2h - \frac{1}{\alpha}K^2 - 2x) - (c - Kx^3)$$

où x représente l'altitude de l'extrémité de l'axe dans le repère fixe (cf figure suivante), K est la valeur du moment par rapport à l'axe, c est une constante et h est l'énergie totale. Cette équation différentielle est du type :

$$x^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3. Les solutions $(\dot{x}, x)$ de cette équation se situent donc sur une courbe elliptique représentée par la figure suivante :

FIG. 4 – Courbe elliptique réelle

FIG. 5 – L'extrémité de l'axe de la toupie tourne en oscillant entre deux cercles parallèles

Les trois points d'intersection de la courbe avec l'axe horizontal $y = 0$ sont les trois racines de P. Les deux racines a et b ont un rôle trés important. Cette figure se traduit par le fait que le sommet de la toupie se ballade entre les deux cercles d'altitude a et b (figure). ceci est un exemple de problème de géométrie algébrique trés élémentaire appliqué à la description de ce qui se passe en mécanique classique. Cet exemple est suffisament motivant pour se donner la peine de donner quelques définitions un peu plus formelles.

A propos des courbes elliptiques...(à encadrer + figure du tore à côté)

Une courbe elliptique complexe $\mathcal{C}$ est une courbe donnée par une équation du type

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ , \ y^2 = P(x)$$

où P est un polynôme (à coefficients complexes) de degré 3. On utilisant quelques rudiments d'analyse complexe, on peut montrer grâce à la fonction méromorphe $\mathcal{P}$ de Weierstrass qu'une courbe elliptique complexe est en fait isomorphe à un tore complexe (de dimension un), quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau Λ (voir figure plus loin). Vous pouvez remarquer que le tore est une courbe complexe compacte et il faut en fait rajouter un point à $\mathcal{C}$ (qui est le point à l'infini de la courbe) pour que ce que je raconte soit tout à fait vrai. On peut imaginer que la conjugaison complexe correspond sur le tore à la symétrie par rapport au plan horizontal et les points réels de la courbe (qui sont les points invariants par conjuguaison complexe) correspondent aux points du tore situés sur le plan horizontal et on retrouve bien les deux composantes connexes [4].

[4]l'isomorphisme précédant est en fait un isomorphisme de groupe de Lie qui confère

FIG. 6 – Un tore complexe ; les deux cercles, intersections du tore avec le plan horizontal correspondent à la courbe elliptique réelle

2 Définition d'un système hamiltonien, puis d'un système hamiltonien intégrable

On a tous vu en physique ce type d'équations :

$$\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, ..., n \quad (3)$$

où les $2n$ fonctions $p_1, ...p_n, q_1, ..., q_n$ sont des fonctions du temps ($p_i = p_i(t)$) et H est une fonction de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ ($H = H(_1, ...p_n, q_1, ..., q_n)$) qui donne naissance aux équations différentielles (3) ou, de manière équivalente, à un champs de vecteur. Si jamais cette identification d'un système différentiel avec un champs de vecteur vous paraît incongrue, n'hésitez pas à me le dire.

Plus généralement, on remplace $\mathbb{R}^{2n}$ par une variété réelle de dimension $2n$ et la fonction H est alors définie sur W. Je vous demande maintenant : comment construire un champs de vecteur sur W à partir de la fonction H ? Personne ne sait ? Si ! On prend le gradient. Mais ici, la notion de métrique permettant de définir un gradient a disparu. Pour définir le gradient usuellement, on prend d'abord la différentielle de la fonction qui définit une forme linéaire sur chaque espace tangent. Cependant on ne veut pas une forme linéaire mais un vecteur tangent dans chaque espace tangent. On utilise donc l'isomorphisme entre un espace et son dual, ici entre les formes linéaires sur l'espace tangent et l'espace tangent lui-même. Dans le

à la courbe elliptique une structure de groupe ; cette loi de groupe peut se montrer de manière géométrique élémentaire, mais l'associativité est difficile à prouver par ce procédé alors que l'isomorphisme précédant l'implique naturellement.

cas du gradient, on a besoin du produit scalaire, donc d'une métrique (riemanienne). Pour résoudre ce problème dans W, on a besoin d'un peu plus de subtilité. On se donne une 2-forme différentielle ω sur W, c'est à dire pour chaque x, ω_x est une forme bilinéaire alternée sur T_xW, l'espace tangent à W en x. Si on suppose en plus qu'elle est non dégénérée, elle nous donne un isomorphisme entre l'epace tangent et l'epace cotangent T^*W (elle joue le rôle du produit scalaire). Maintenant, si on regarde la différentielle de H en x, on peut l'écrire :

$$dH_x = \omega_x(., X_H(x))$$

pour un certain vecteur $X_H(x)$. On a associé à la fonction H un champs de vecteur X_H et l'équation (3) devient :

$$\dot{x} = X_H(x) \quad (4)$$

On cherche donc une courbe paramétrée (par le temps, ici) du type $t \to x(t) = (x_1(t), ..., x_{2n}(t))$ tangente à ce vecteur en chaque point. L'équation différentielle (4) sur W est ce que l'on appelle *un système hamiltonien.* Puisque ω_x est une forme bilinéaire alternée, vous voyez que l'on a :

$$\omega_x(X_H(x), X_H(x)) = 0 \;\forall\; x.$$

Cela veut dire que la fonction H est constante sur toute trajectoire solution de l'équation différentielle (4) (comme précédemment pour l'énergie, ce qui explique le choix de la notation H). La foncton H est ce que l'on appelle une *intégrale première.*

Le système d'Euler-Poisson de l'introduction

$$\begin{array}{cc} \Gamma & = \\ \Gamma \wedge \Omega & \\ M & = \\ M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L & \end{array}$$

se résoud dans la sous-variété W de $\mathbb{R}^6$ donnée par les deux équations

$$\begin{array}{cc} \|\Gamma\| & = \\ 1 & \\ M.\Gamma & = \\ C & \end{array}$$

Entre parenthèse, la première équation signifie que l'on regarde Γ sur la sphère unité et la deuxième équation pour $C = 0$ signifie que M vit sur l'espace tangent à cette sphère. Pour C non nul, on peut faire la même interprétation. Dans ce cas la variété W s'identifie donc au fibré tangent à la sphère S^2 et n'a pas une structure trés compliquée.

La fonction H est ici l'énergie totale :

$$H = \frac{1}{2} M.\Omega + \Gamma.L\,.$$

Je prétends qu'il existe sur W une forme ω ayant les propriétés requises pour que ce système soit précisément un système hamiltonien. Ainsi, les équations d'Euler-Poisson sont un exemple particulier de ce que je raconte maintenant.

J'insiste à nouveau sur le fait que dans cet exemple, H n'était pas la seule quantité conservée. J'en arrive donc à la définition d'un système hamiltonien intégrable. Il y a plusieurs définitions sur le marché, je choisis ici la notion d'intégrabilité au sens de Liouville :

Définition 1 *Un système hamiltonien est dit intégrable s'il possède "beaucoup" d'intégrales premières.*

Puisque je fais un exposé mathématique, je dois être plus précise que cela. D'abord, il faut faire attention : si H est une intégrale première, vous comprenez bien que $2H$ et $exp(H)$ le sot aussi. On s'intéresse donc aux intégrales premières fonctionnellement indépendantes, c'est à dire qu'en presque tout point de W, les différentielles des intégrales premières sont linéairement indépendantes. Si la dimension de la variété W est $2n$, "beaucoup" signifiera au moins n intégrales premières fnctionnellement indépendantes.

Plus précisément, si f est une intégrale première du système hamiltonien $x = X_H(x)$, c'est dire qu'elle est constante sur toutes les trajectoires définies par les solutions $x = x(t)$ de ce système, ce qui se traduit par l'équation :

$$df_x(X_H(x)) := \omega_x(df_x, X_H(x)) = 0.$$

En fait cette intégrale première f est bien sûr une fonction sur W à laquelle je peux associer le champs de vecteur X_f comme étant l'unique solution de

$$df_x = \omega(., X_f(x))$$

et je vais en fait demander que toute intégrale première soit constante sur les trajectoires de chacune des autres. En d'autres termes, on a la définition mathématique suivante :

Définition 2 *Si* $dimW = 2n$*, le système hamiltonien est intégrable s'il existe au moins* n *intégrales premières fonctionnellement indépendantes* $f_1, ...f_n$ *telles que* $df_i(X_{f_j}) = 0$ *pour tout* $(i, j) \in \{1, .., n\}^2$*.*

En fait n est le maximum que l'on peut atteindre et dans ce cas il est atteint. Ce nombre n qui est la moitié de la dimension est appelé *le nombre de degrés de liberté*. Par exemple, dans le cas de la toupie, la variété sympleptique W est de dimension 4 et le nombre de degrés de liberté est 2 (et c'est vrai pour tout solide plongé dans $\mathbb{R}^3$ en général). On cherche donc deux intégrales premières. On a bien sûr H, (qui est dans tous les cas une intégrale première du système hamiltonien $x = X_H(x)$), et on a aussi le moment par rapport à l'axe (que l'on avait appelé K). La toupie est donc un exemple de système hamiltonien intégrable.

Voici d'autres exemples. D'abord, le pendule sphérique que vous connaissez tous : (deux figures l'une à côté de l'autre)

FIG. 7 – Pendule sphérique

FIG. 8 – Mouvement du pendule vu de haut

On attache une barre à un point fixe O et on la fait bouger. Comme la barre est rigide, son extrémité reste évidemment sur une sphère, comme avant. On obtient encore un système hamiltonien à deux degrés de liberté. Les inconnues sont la position de l'extrémité de la barre et sa vitesse. On a une deuxième intégrale première donnée par le moment par rapport à la verticale (où la verticale est donnée par la force de la pesanteur). Vu d'en haut, on voit que le mouvement a lieu entre deux cercles parallèles (cf figure), ce qui n'est pas sans rappeller le cas de la toupie. On verra que ce n'est pas un hasard.

Il y a d'autres exemples trés jolis, ce sont les exemples de géodésiques : (figures à côtés l'une de l'autre)

FIG. 9 – Géodésiques de la sphère

FIG. 10 – Géodésiques de l'ellipsoïde

On se donne une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ et on laisse une particule "se ballader" sur cette surface sans aucune autre contrainte que de rester sur cette surface. Son mouvement définit alors une géodésique[5]. Par exemple, sur une sphère, les géodésiques sont les grands cercles (figure). En général, pour n'importe quelle surface de révolution, on a un comportement assez analogue et il n'est pas trés difficile de démontrer ce que l'on savait déjà depuis longtemps (du temps de Clérot ? ?) : une géodésique d'une surface de révolution restera coincée toujours entre deux cercles de révolution (figure). Ceci rappelle à nouveau les autres exemples cités. Un dernier exemple trés joli, où la géométrie algébrique réelle intervient une fois de plus dans l'étude des systèmes hamiltoniens intégrables, est le cas où le solide est un ellipsoïde (topologiquement une sphère), qui est une quadrique du type

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que l'on regarde avec la métrique induite (sur la figure, la géodésique est en rouge). On s'aperçoit qu'il y a deux courbes (en vert sur la figure) qui sont en fait, pour ceux qui savent ce que c'est, les lignes de courbures de la surface, et entre lesquelles va osciller la géodésique, sans jamais entrer dans la "zone interdite". Tous ces résultats sont trés classiques et ces trois exemples sont tous des systèmes hamiltoniens intégrables (ce n'est pas évident de le montrer pour l'ellipsoïde, mais c'est vrai). Je fais remarquer que toutes les figures présentées sont trés similaires. La figure suivante me permet d'insister sur ce point :

FIG. 11 – les géodésiques oscillent entre des lignes de courbure

Dans tous les cas, on voit que les géodésiques restent coincées dans un domaine délimité par deux courbes (topologiquement un anneau). Ces remarques nous amènent au premier théorème de cette théorie.

[5] cela signifie que son mouvement garde toujours la même direction, autrement dit que le vecteur tangent à sa trajectoire reste constant

3 Le théorème de Liouville

Je constate que les tableaux à Bordeaux ne se manipulent qu'un par un. Vous restez assez primaire, ici... Mais je dois reconnaître que je me débrouille plutôt mieux que la moyenne des mathématiciens avec les tableaux... Enfin, revenons à ce qui nous intéresse. Ce théorème s'appelle le théorème de Liouville (justifiant le nom de la définition utilisée), et je l'énonce de manière correcte quoiqu'un peu vague :

Théorème 1 *(théorème de Liouville) Le mouvement des solutions d'un système hamiltonien intégrable a lieu sur des tores de dimension n et est linéaires sur ces tores.*

Ce théorème est en fait vrai sous certaines hypothèses de compacité qui me permettent d'affirmer que l'une des intégrales premières est propre. Plus précisément,....

Que signifie ce théorème ? Voici une figure pour vous rappeller ce qu'est un tore et un mouvement linéaire sur ce tore.

FIG. 12 – tore et mouvement linéaire

Un tore noté T^2 plongé dans une variété sympleptique W_4 de dimension 4 peut se voir comme le quotient de $\mathbb{R}^2$ par un groupe G de translation :

$$T^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{G}.$$

On obtient ainsi un domaine fondamental de $\mathbb{R}^2$ qui représente ce tore, dont les points du bord opposés deux à deux sont identifiés (figure). L'image d'une droite de $\mathbb{R}^2$ sur le tore par ce procédé de recollement nous donne une courbe fermée sur le tore qui est ce que l'on appelle une courbe linéaire. Ainsi, la variété W de dimension $2n$ peut se voir comme "une pâte feuilletée remplie de tores de dimension n". Si une trajectoire part sur un tore, elle reste sur ce tore et définit en fait une courbe linéaire sur ce tore. Sur la figure de la sphère (numéro ?), on voit que les trajectoires se situent sur un anneau. Il ne faut pas oublier ici que la sphère est plongée dans un espace W de dimension 4 (qui est l'espace dans lequel on travaille réellemnt), dans lequel la vitesse du mobile est prise en compte. C'est la différence entre ce que les physiciens appellent *l'espace de phases* (de dimension $2n$) et *l'espace de configuration* (de dimension n).

Le théorème de Liouville est assez fondamental, notament pour la raison suivante : il existe en fait assez peu de système hamiltoniens intégrables. Parfois on a un système hamiltonien qui n'est pas intégrable, mais "tout prés de lui" existe un système hamiltonien intégrable. La théorie nous dit alors qu'il va rester des tores sur ce système perturbé "presqu'intégrable". C'est ce que l'on appelle la théorie KAM des tores invariants, dont je ne parlerai pas.

Ce théorème porte le nom de Liouville bien qu'il n'en soit pas l'auteur (la théorie des tores n-dimensionnels n'existait pas), car ce dernier a fait plusieurs observations concernant les systèmes intégrables cachés derrière le théorème. C'est Arnold, dans son livre *"méthode mathématiques de la mécanique classique"* qui attribue ce théorème à Liouville, montré pour la première fois par Mineur en 1936 (Mineur était un mathématicien dans la rubrique Joliot). Ce théorème aurait dû porter son le nom de Mineur, mais Liouville en a hérité...

J'ai dit que je parlerai de géométrie algébrique, c'est ce que je vais faire dans la suite.

4 Version algébrique du théorème de Liouville

On s'intéresse maintenant à une équation qui à l'air différente des équations de Hamilton mais qui, on va le voir, ne le sont pas tellement. On se donne un système différentiel que l'on suppose écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dA_\lambda}{dt} = [A_\lambda, B_\lambda] \quad (5)$$

où A_λ et B_λ sont des matrices dépendantes du temps et polynomiales en λ et où $[.,.]$ désigne les crochets de Lie. Les quantités A_λ et B_λ ne sont pas indépendantes et cette équation n'est pas linéaire.

Pour éclairer cette approche, on reprend l'exemple des équations (1) et (2) d'Euler-Poisson (cas de la toupie). Elles peuvent se réécrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\Gamma} + \tilde{M}\lambda + \tilde{L}\lambda^2) = [\tilde{\Gamma} + \tilde{M}\lambda + \tilde{L}\lambda^2, \tilde{\Omega} + \tilde{L}\lambda]$$

où $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{M}$, $\tilde{L}$ et $\tilde{\Omega}$ sont quatre matrices antisymétriques images des vecteurs Γ, M, L et Ω via l'isomorphisme d'algèbre de Lie

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \wedge) & \rightarrow & (SO(3), [.,.]) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

où $SO(3)$ est l'espace des matrices 3×3 antisymétriques. Dans ce cas, les matrices A_λ et B_λ dépendent bien l'une de l'autre puisque les vecteurs M et Ω sont liés. L'équation (7) s'appelle l'équation de LAX. Quelle est l'utilité de cette approche ? En fait l'équation (5) exprime le fait que la matrice A_λ reste conjuguée à elle même au cours du temps, autrement dit que les solutions sont de la forme

$$A_\lambda(t) = U_\lambda(t)A_\lambda(0)U_\lambda^{-1}(t)$$

pour une certaine matrice inversible U_λ. A priori, on ne gagne rien car trouver la matrice U_λ est difficile. Cependant, on voit ainsi que toutes les caractéristiques de A_λ invariantes par similitude restentconstantes au cours du temps (valeurs propres, polynôme minimal, polynôme caractéristique,...). Par exemple, les coefficients du polynôme caractéristique sont constants au cours du temps et définissent donc des intégrales premières.

Si l'on considère le polynôme en les deux variables λ et ν

$$P(\lambda, \nu) = det(A_\lambda - \nu Id \ ,$$

il donne naissance à une courbe algébrique

$$C = \{P(\lambda, \nu) = 0.$$

Ici, on trouve en fait une courbe elliptique qui est isomorphe à la courbe elliptique vue dans l'introduction. Je m'adresse maintenant aux spécialistes de la géométrie algébrique. Pour ceux qui savent, à une courbe algébrique sont associés plusieurs tores, notament la jacobienne de la courbe. Dans le cas où l'on a un système intégrable réécrit via l'équation de LAX, il s'avère que les tores de Liouville et la linéarisation sur ces tores impliquent les tores identifiés à des variétés abéliennes, comme par exemple la jacobienne de la courbe algébrique. Notament le tore isomorphe à la courbe elliptique (encadré) peut être considéré comme une jacobienne et à un rapport direct avec ce que je raconte ici. Ces considérations sont la source d'une intense activitéde recherche (déjà un peu ancienne) dans la théorie des systèmes intégrables. Dans les cas de la toupie et du pendule, on obtient une courbe elliptique (courbe de genre 1). Par contre, dans le cas de l'ellipsoïde (de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, on obtient une courbe de genre 2, et plus généralement pour un ellipsoïde de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on obtient une courbe de genre n. Le cas de l'étude des géodésiques sur une quadrique est une trés belle théorie de la géométrie algébrique qui intervient une fois encore naturellement dans l'étude des systèmes hamiltoniens intégrables. La géométrie algébrique sert ici à linéariser les solutions sur les tores (sur une courbe abélienne, il y a une structure affine canonique et ce n'est pas rien de dire qu'il existe des courbes linéaires sur ces objets) et permet de décrire la topologie des systèmes intégrables, par exemple le cas des tores de Liouville dans l'étude des géodésiques sur une quadrique (nombre de tores, etc...).

On peut également décrire une apparition souvent mal comprise de la monodromie. Je l'illustre ici par cette figure issue du cas du pendule sphérique.

FIG. 13 –

Ce dessin représente l'image de W dans $\mathbb{R}^2$ via l'application

$$(H,K) : W \to \mathbb{R}^2$$

où H et K sont les deux intégrales premières obtenues sur la variété W de dimension 4. Du fait des dimensions de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée, l'application étant régulière, les deux intégrales premières sont indépendantes presque partout.

L'ensemble des valeurs critiques de cette application représentée en rouge sur la figure est constituée d'une courbe et, bizarrement, d'un point, ce qui peut paraître troublant pour les habitués de l'analyse complexe. Le théorème d'Arnold-Liouville exprime le fait que l'image réciproque d'une valeur non critique est un sous-tore de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. Personnellement, quand je vois une singularité, je ne peux pas m'empêcher de tourner autour. C'est tellement rare d'avoir une singularité isolée dans $\mathbb{R}^2$ que j'en profite. Il apparaît alors de la monodromie (j'en reparlerai plus tard) qui peut-être elle aussi décrite par la géométrie de la courbe algébrique réelle précédante, impliquant notament la notion de courbure.

La suite de l'exposé est presque indépendante de ce qui a été fait jusqu'à présent. La question principale à laquelle je vais essayer de répondre, et que vous avez dû vous poser, est la suivante : comment montrer qu'un système hamiltonien est ou n'est pas intégrable ?

5 comment montrer qu'un système hamiltonien est ou n'est pas intégrable

Pour montrer qu'un système est intégrable, on a vu qu'il fallait exhiber des intégrales premières. Si vous n'en trouvez pas suffisament, soit vous n'êtes pas suffisament malin, soit il n'y en a réellement pas. Je vais donc essayer d'expliquer une autre méthode pour montrer qu'un système hamiltonien n'est pas intégrable. Je reprends l'exemple du début de l'exposé du solide avec un point fixe. On peut envisager plusieurs cas. D'abord le cas où le point fixe coïncide avec le centre de gravité ; dans ce cas, le moment appelé (je crois) *le moment cinétique total* est une intégrale première. Ce cas a été étudié par Euler au 18^{eme} siècle. Puis il y a bien sûr eu le cas de la toupie symérique, étudié par Lagranges à la fin du 18^{eme} siècle pour lequel cette intégrale première correspond au moment par rapport à l'axe. C'était tout ce que l'on savait au début du 19^{eme} siècle, à tel point que l'Académie des Sciences avait proposé un prix pour quelqu'un qui apportait de nouvelles informations intéressantes à ce sujet. Cela a attendu 1889 où Sophie Kowalesky (qui est le nom avec lequel elle signa son article, mais on l'appelle aujourd'hui Sonia Kowaleskaya) qui s'est mise à étudier le problème. Elle posa le problème d'une façon assez étrange (il faut dire qu'à l'époque, ils ne se posaient pas le problème de savoir quand un système était intégrable, mais sous d'autres formes de questionnement). Sa méthode assez intéressant fût de considérer le temps non plus réel mais complexe (ce que ne pouvait faire Lagranges, les nombres complexes n'existant pas à son époque) et elle s'est aperçu que dans les deux cas résolu, les solutions du système différentiel étaient méromorphes, fait surprenant puisu'un système différentiel non linéaire dans le champs complexes peut donner naissance à des solutions épouvantablement compliquées (logarithmes, branchements infinis, ramification,...). Elle s'est demandée s'il y avait d'autres cas pour lesquels les solutions ne présentaient que ce type de singularités méromorphes. En changeant les coefficients de la matrice d'inertie et en résolvant les équations, elle a trouvé un autre cas, que l'on appelle aujourd'hui la toupie de Kowalesky, correspondant à la matrice d'inertie

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et pour lequel on avait une autre intégrale première au sens de Liouville. La question posée alors était de montrer que dans tous les autres cas ce n'était pas intégrable. Comment faire ? Je vous donne un exemple de système non intégrable :

FIG. 14 –

On regarde un satellite qui suit les lois de Keppler en orbite circulaire autour de la Terre et on s'intéresse à son mouvement propre autour de son centre de gravité que l'on appelle (aprés la nutation, vous allez apprendre un autre mot) *l'attitude du satellite*. L'étude de ce mouvement est extrémement importante : vous n'avez pas lancé ce satellite pour qu'il aille se promener dans l'espace, mais il a des antennes, des caméras, et il a du boulot à faire. S'il se met à "rentrer en trance" et qu'il se met à regarder du mauvais côté, il ne servira à rien, d'où l'importance d'étudier son attitude. Notament on a constaté qu'un système intégrable à un mouvement trés régulier (pour le cas symétriques, les trajectoires sont sur les tores avec des mouvements quasi-périodiques) et c'est donc intéressant de savoir si ce nouveau système est intégrable. Comment faire ?

J'en arrive ainsi à une méthode dûe à Morales et Ramis qui est en fait un théorème qui date des années 1999.

On se place dans le cadre analytique : on se donne un système hamiltonien et on suppose qu'il est défini sur une variété analytique et que toutes les fonctions intervenantes sont analytiques. Tant qu'on y-est, on va tout complexifier et si j'ai le temps j'expliquerai comment on fait pour le cas réel. On suppose donc que tous les vecteurs mis en jeu sont dans $\mathbb{C}^3$. On suppose donc que l'on arrive pas à montrer que le système est intégrable et on veut donc montrer sa non intégrabilité.

Théorème 2 *(méthode de Morales-Ramis, 1999) a) Premièrement, on trouve une solution particulière, qui est donc une courbe complexe. C'est donc aussi une surface de Riemann (à la question qu'est-ce qu'une surface de Riemann, je répondrai que c'est une courbe complexe...).*

b) Ensuite, on linéarise le système le long de la solution. Plus explicitement, cela veut dire qu'à la solution

$$\dot{x} = X_H(x)$$

j'associe le système différentiel

$$\dot{Y} = (dX_H(x))(Y)$$

qui est cette fois un système différentiel linéaire.

c) Ce système différentiel possède un groupe de Galois différentiel (voir encadré) qui est un groupe de Lie.

d) Si ce groupe de Galois différentiel n'est pas virtuellement abélien (voir encadré), alors le système différentiel n'est pas intégrable.

Encadré : la théorie de Galois...

...algébrique : la théorie de Galois algébrique s'intéresse à décrire l'ensemble des racines de polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Par exemple, les deux équations

$$X^2 - 2 = 0 \quad X^5 + 6X + 1 = 0.$$

Elles n'ont ici pas de solutions rationnelles et les solutions vivent en fait dans une extension de $\mathbb{Q}$ que l'on appelle le corps de décomposition du polynôme (cette extension est le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et les racines du polynôme en question ; c'est le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pour la première équation et, disons K pour la deuxième). A cette extension, on peut associer un groupe, le groupe de Galois G qui est le groupe des automorphismes de ce corps qui préserve le corps de départ (donc $\mathbb{Q}$ ici). Dans le premier cas, le groupe de Galois est simplement le groupe multiplicatif à deux éléments $G = \{1, -1\}$ qui échange les racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ entre elles ; dans le deuxième cas, c'est $G = S_5$, le groupe symétrique qui permute les 5 racines (que l'on ne peut à priori pas expliciter) entre elles. Dans tous les cas, le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symétrique S_n (où n est le degré du polynôme) puisqu'il permute les racines entre elles.

...et différentielle : la théorie de Galois différentielle est calquée sur la théorie algébrique, mais on remplace cette fois le corps de base pas un corps de fonctions, munis en plus d'une dérivation, qui est un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire sur ce corps. Par exemple, le corps $\mathbb{C}(t)$ des fractions rationnelle d'une variable complexe, munis de la dérivation usuelle. On s'intéresse alors a des équations différentielles linéaires à coefficients dans le corps en question (ici $\mathbb{C}(t)$), par exemple

$$\prime Y = Y \quad \prime\prime Y + AY = 0\,(quationd'Airy).$$

Comme pour le cas algébrique, les solutions ne vivent à priori pas dans le corps de base, mais dans une extension différentielle

$$K/\mathbb{C}(t)$$

qui est le plus petit corps différentiel contenant le corps de base (donc dans lequel on peut prolonger l'opérateur de dérivation) et qui contient le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les solutions. Ce corps existe et s'appelle ce corps l'extension de Picard-Verchot. On peut à nouveau regarder les automorphismes de ce corps compatibles avec la dérivation, qui laissent stable le corps de base et qui agit sur l'ensemble des solutions qui est cette fois un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension m où m est l'ordre de l'équation différentielle. On obtient donc un groupe Gal, le groupe de Galois différentiel qui est cette fois un sous-groupe du groupe linéaire $GL(m, \mathbb{C}$. Il se trouve que c'est un sous-groupe algébrique, c'est à dire défini par des équations polynômiales (c'est un théorème dû à Kolchigne) ; en particulier, et c'est ce qui nous intéresse, Gal est un groupe de Lie, qui a plusieurs composantes connexes.

On dit qu'un groupe de Lie est *virtuellement abélien* si sa composante connexe neutre (qui contient l'élément neutre) est abélienne.

Dans le premier exemple d'équation différentielle linéaire, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions g s'écrivant $g(t) = ae^t \, a \in \mathbb{C}^*$ et le groupe Gal est donc le groupe $\mathbb{C}^*$. Ce groupe de Lie est connexe est abélien, donc évidemment virtuellement abélien. Pour le deuxième exemple on peut prouver assez difficilement, que le groupe de Galois Gal associé est $Gal = SL(2; \mathbb{C})$ qui se trouve être un groupe connexe non abélien. (fin encadré).

Ce théorème est extrémement puissant. Il se démontre facilement à partir d'un lemme de géométrie sympleptique assez facile à montrer qui permet de traduire l'hypothèse (dont j'ai parlé au début) que chaque fonction est constante sur les orbites de chaque autre en terme d'intégrabilité.

Le gros avantage que le groupe de Galois soit un sous-groupe algébrique est qu'il est un groupe de Lie ; or un groupe de Lie a la grande qualité de posséder une algèbre de Lie, cette algèbre permettant de faire du calcul infinitésimal avec des champs de vecteurs. C'est ce qui rend ce théorème assez facile à démontrer alors qu'il existait des analogues manipulant des groupes discrets qui étaient trés difficile à démontrer. Maintenant, il faut l'utiliser, ce théorème. C'est en fait assez difficile, puisqu'il faut trouver trouver une solution particulière suffisament compliquée pour que le groupe de Galois associé soit non virtuellement abélien (ma première contribution à ce sujet fût d'ailleurs, alors que je ne comprenais pas encore grand chose à ce théorème, de trouver un tel exemple de solution particulière pour un certains système différentiel, pour montrer qu'il n'était donc pas intégrable). Une dernière remarque d'ordre général ; je pense que la propriété d'avoir un groupe de Galois assez compliqué pour un système différentiel linéaire est une version à l'ordre 1 d'une idée soulevée par Sonia Kowaleskaya qui était que les solutions du système de départ (non linéarisé) ne soit pas trop compliquée, par exemple qu'elle n'aient pas de ramifications. On se rapproche donc avec ce théorème d'une compréhension des travaux antérieurs.

Je veux vous montrer maintenant deux exemples ; pour les comprendre, il faut que je revienne sur la notion de monodromie.

Je vais vous montrer quelquechose contenu dans le groupe de Galois et que l'on peut voir, ce qui est rarement le cas pour ce qui est dans le groupe de Galois. On a une solution γ au système de départ, qui est une surface de Riemann (pas forcément compacte ressemblant à quelquechose comme ça :

FIG. 15 – une intégrale première complexe définit une surface de Riemann

On regarde ensuite l'équation différentielle linéaire le long de cette surface de Riemann puis on se donne un certain nombre de vecteurs $Y_1(t), ..., Y_n(t)$ formant une base de l'espace tangent (je rappelle que l'on s'intéresse aux champs de vecteur tangent à cette courbe. On va ensuite faire ce que, comme je vous l'ai déjà dit, je ne peux pas m'empécher de faire, on va aller se promener. On part d'un point, disons à l'instant $t = 0$, puis aprés avoir fait un tour le long d'un chemin α, je reviens au point de départ. Si par malheur je suis partie assez loin, je reviens au départ avec d'autres vecteurs que $Y_1, ..., Y_n$, disons les vecteurs $Y_1', ..., Y_n'$ qui n'ont aucune raison d'être les mêmes qu'au départ, bien qu'ils forment tout de même une nouvelle base du même espace vectoriel. Je peux alors définir une application f qui est un morphisme de groupe du groupe fondamental de γ dans le groupe linéaire

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(\gamma, x_0) & \to & GL(m, \mathbb{C}) \quad (m = 2n) \\ \alpha & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

où $f(\alpha)$ s'interprète comme la matrice de passage de la base $Y_1, ..., Y_n$ à la nouvelle base $Y_1', ..., Y_n'$ obtenue aprés avoir parcouru le chemin α (si le lacet α est dans la même classe d'équivalence que le lacet neutre, la base ne change pas et l'image de α est l'identité). On appelle cette application la *représentation de monodromie de la courbe* γ. Bien sûr, l'image du π_1 par f est un sous-groupe du groupe de Galois différentiel du système que l'on appelle le *groupe de monodromie*. C'est un sous-groupe discret du groupe algébrique Gal dont l'adhérence est encore un sous-groupe de Gal.

Voici deux applications pour lesquelles le théorème s'applique :

- Le cas du solide avec un point fixe n'est pas intégrable sauf dans les cas spéciaux cités tout à l'heure. Cela a été prouvé en 1982 par Ziglin, puis il y a peu par deux polonais Maciejiewski et Prjylibs en application du théorème de Morales-Ramis. C'est assez joli mais je ne vais pas le montrer ici puisque c'est assez compliqué et vous devez être maintenant fatigués.
- Le cas du satellite que je vais essayer d'expliquer maintenant.

FIG. 16 – une intégrale première complexe définit une surface de Riemann

Je considère la normale N au plan de rotation (qui ne s'appelle pas, comme me l'ont fait remarquer des astronomes, la verticale, la verticale étant ce qui est dirigé vers la Terre), puis je regarde le vecteur radial (vertical, cette fois). Dans un repère lié au solide, on obtient les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{N} = N \wedge \Omega \\ \dot{\Gamma} = \Gamma(\Omega - N) \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + 3\Gamma \wedge J\Gamma \end{cases}$$

régissant le mouvement du satellite (M est comme tout à l'heure le moment cinétique). On constate facilement que l'on a en plus les relations suivantes

$$\begin{cases} \|N\|^2 & = \\ 1 \\ \|\Gamma\|^2 & = \\ 1 \\ \Gamma.N & = \\ 0 \end{cases}$$

qui font que l'on travaille sur la variété sympleptique

$$W = SO(3) \times \mathbb{R}^3$$

de dimension réelle 6 pour laquelle on a donc 3 degrés de liberté. On rentre à nouveau dans le cadre hamiltonien. Comme toujours, l'énergie totale H est une intégrale première, et on se demande s'il y a deux autres intégrales premières. On applique la méthode de Morales-Ramis ; je cherche donc une solution particulière à mon système différentiel. Je m'impose $N = e_3 = (0, 0, 1)$, c'est à dire qu'il y ait une direction d'inertie du satellite qui reste fixe. Dans ce cas, on a forcément $\Gamma = (x, x, 0)$ et M est un multiple de N, soit $M = \lambda.e_3$. Avec toutes ces considérations, je suis contente d'obtenir le système suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = \\ 1 \\ h & = \\ \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{c} - \lambda + \frac{3}{2}(ax^2 + by^2) \end{cases}$$

où h est l'énergie totale du système. Je n'ai pas écrit comment les fonctions x et y varient en fonction du temps, mais je sais que ma solution particulière doit vérifier ces deux équations. Elle est est donc contenue dans un ensemble qui est l'intersection de deux surfaces dans un espace de dimension 3 qui sont, comme vous l'avez tous remarqué deux quadriques ; et comme vous êtes trés bons en géométrie algébrique, vous savez certainement que l'intersection de deux quadriques est encore une courbe elliptique. La première équation donne naissance à un cylindre que je représente déplié sur sur la figure suivante

FIG. 17 – les intégrales premières vues sur le cylindre déplié

Toutes les courbes sont des courbes elliptiques qui ont, comme toute brave courbe elliptique réelle, soit une soit deux composantes connexe, sauf les courbes vertes, courbes singulières qui sont rationnelles. Ces dernières sont simplement des ellipses au sens classique du terme (intersection d'un cylindre et d'un plan) qui se coupent en deux points (le point central et le point "derrière"). Il y a d'autres courbes singulières qui se réduisent à des points singuliers. Par exemple, les deux points singuliers sur la figure correspondent, si l'on regarde les équations, à un satellite qui ne bouge pas autour de son centre de gravité, comme la lune par exemple.

On doit choisir une solution particulière, et comme je suis plus paresseuse que les poloais, je choisis une solution rationnelle (une des deux courbes vertes). Je réécris les équations précédantes en les linéarisant le long de cette solution. Cette solution est une ellipse que je vais regarder ici de plus prés. Je la regarde en complexe : j'ai donc un ellipsoïde auquel je dois rajouter les deux points à l'infini. Il y a également deux points singuliers (rouge sur la figure) sur cette courbe qui se présente donc comme cela

FIG. 18 – l'ellipse complexe

où la courbe dessinée représente l'ellipse réelle. Les points singuliers sont suffisament éloignés des points à l'infini, puisque l'on peut en fait montrer qu'ils sont suffisament proches de la courbe réelle.Cependant, une courbe rationnelle a en général peu de chance d'avoir son groupe fondamental π_1 non trivial puisqu'elle est à priori simplement connexe. On ne risque donc pas d'avoir suffisament de monodromie. L'idée est donc d'enlever des points. Il faut en enlever au moins deux pour avoir un groupe libre a deux générateurs "suffisament non abélien". En fait deux ne suffisent pas (dans ce cas $\pi_1 = \mathbb{Z}$ qui est encore abélien), mais à partir de 3 ou 4 points en moins (4 c'est mieux pour des raisons de symétrie), le π_1 devient suffisament sympathique puisque (pour 4 points) c'est le groupe libre a trois générateurs qui n'est plus du tout abélien. En effet, on peut démontrer dans ce cas que les lacets noirs qui tournent autour des points singuliers donnent un sous-groupe de monodromie de matrices de $SL_2(\mathbb{C})$ diagonalisables, donc équivalentes à des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

et les lacets rouges qui tournent autour des points à l'infini donnent un sous-groupe de monodromie de matrices de $SL_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables, c'est à dire équivalentes à des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or il est facile de démontrer qu'aucun des sous-groupes algébriques de $SL_2(\mathbb{C})$ n'a de composantes neutres, ce qui finit de montrer que le cas du satellite est un système hamiltonien non intégrable.

Encore un dernier mot à propos de ce problème ; c'est en réalité un problème difficile puisqu'il a 3 degrés de liberté. J'ai démontré que ce n'était pas intégrable dans le cas où j'arrivais à me ramener à un problème dans $SL_2(\mathbb{C})$ en rajoutant en fait une symétrie au satellite. C'est bizarrement par ce biais que j'ai réussi à montrer la non-intégrabilité de ce système.

La même démonstration avec les mêmes hypothèses et les mêmes calculs a été obtenue par le calcul formel par Delphine Boucher à Rennes. Mon argument géométrique a été remplacé par le calcul formel et les deux choses ont été faites à peu prés simultanément. Je le précise car ce sont des problèmes assez simple pour le calcul formel ce qui les rend intéressants de ce point de vue là.

Voilà, je m'arrêterai ici.

Christophe Bavard : Est-ce qu'il existe des systèmes hamiltoniens analytiques avec des intégrales premières $\mathcal{C}^\infty$?

M.Audin : Oui. Il y a un trés joli exemple avec des exponentielles, que je serai incapable d'expliquer là, de Bolsinov.

Christophe Bavard : Est-ce qu'il existe des systèmes différentiels qui donnent naissance à des extensions non triviales avec des groupes de Galois triviaux ?

M.Audin : Non, je ne pense pas...(temps de réflexion)...Je ne sais pas pourquoi, mais j'ai le pressentiment que non...C'est grave de pas pas pouvoir répondre aux questions ? Vous les écrivez dans le rapport ?

Eric.Charpentier : Je ne sais pas encore, c'est négociable...

M.Audin : Décidément, les gens ne posent jamais de questions auxquelles on sait répondre. Personne n'aurait de questions à laquelle je saurai répondre ?