# FORMES MEROMORPHES ET HOLOMORPHES SUR UN ENSEMBLE ANALYTIQUE.

# LA NOTION DE TRACE ET UNE GENERALISATION DU THEOREME D'ABEL.

WEIMANN Martin

12 Juin 2002

## Remerciements

Je tiens à remercier Alain Yger pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa grande modestie qui m'ont donné de l'assurance. Il m'a plus qu'accompagné tout au long de ces quelques mois pour la réalisation de ce mémoire et m'a donné un avant-avant goût positif de la recherche en mathématiques pures.

Merci également à tous les professeurs de Bordeaux et Limoges qui m'ont enseigné les mathématiques et m'ont permis de progresser jusque là, spécialement Alain Hénaut pour m'avoir communiqué ces deux dernières années sa passion pour la géométrie.

Un dernier merci à mon professeur de mathématiques du lycée, R.Tassan qui a su me convaincre, malgré mon peu d'attention en classe, d'apprendre les mathématiques.

## Dédicace

Je dédicace ce mémoire à tous mes proches et spécialement mes parents qui, même s'ils ne comprennent pas toujours ni mon travail, ni son utilité, continuent de respecter mes choix.

# Table des matières

# 1 Introduction

Nous savons caractériser les $(q, 0)$-formes méromorphes ou holomorphes sur des variétés analytiques complexes lisses. Nous disposons de moyens variés tels des majorations contrôlées de notre forme ou encore le fait qu'il existe des courants (ou des distributions lorsqu'il s'agit de fonctions) la prolongeant au voisinage de ses singularités éventuelles.

Dans ce mémoire, nous étudierons cette fois la notion de $(q, 0)$-forme différentielle sur un ensemble analytique $V$ quelconque, mais de dimension pure $n \geq q$.

Dans une première partie (section **2**), nous ferons une description locale nous permettant en particulier de voir qu'une telle variété $V$ (considérée plongée dans $\mathbb{C}^{n+p}$ et éventuellement singulière) se présente localement (au voisinage d'un point $z_0 = (z_0', z_0'') \in V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$) comme un revêtement de degré fini au dessus d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ obtenu comme le complémentaire d'une hypersurface dans un voisinage de $z_0'$ (dans $\mathbb{C}^n$).

Nous introduirons alors (dans la section **3**) la notion de $(q, 0)$-forme méromorphe sur de tels ensembles, concept robuste car point de convergence de différentes approches calquées sur celles qui président à la notion de méromorphie usuelle (en particulier une forme méromorphe donne naissance à un courant canonique du type “valeur principale” à support dans $V$).

Nous verrons alors que ces approches induisent des approches divergentes dans le cas holomorphe, ce qui nous permettra de caractériser quatre classes d'holomorphie pour les $(q, 0)$-formes sur un ensemble analytique (coïncidant bien sûr avec la notion usuelle si V n'est pas singulière) :

- restrictions à $V$ de formes holomorphes dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^{n+p}$ ;
- formes définies et holomorphes sur l'ouvert (dans $V$) des points réguliers de $V$ et bornées au voisinage du lieu singulier ;
- formes méromorphes sur $V$, au sens introduit dans la section **3**, holomorphes sur l'ouvert (dans $V$) des points réguliers de $V$, et donnant naissance à des courants $\bar{\partial}$-fermés (ce qui autorise notre forme à avoir certains pôles dans le lieu singulier) ;
- formes différentielles méromorphes qui, une fois relevées sur une résolution $\widetilde{V}$ des singularités, deviennent holomorphes (c'est le concept proposé par P. Griffiths et inspiré de la théorie $L^2$).

Dans la dernière section (section **5**), nous parlerons de la trace d'une $(q, 0)$-

forme différentielle (holomorphe sur la partie lisse de notre variété), nouvelle forme définie et holomorphe sur un ouvert dense de la grassmanienne $\mathbb{G}(n, n+p)$. Nous pourrons alors, grâce aux courants, montrer rapidement une généralisation du théorème d'Abel : la méromorphie (resp. holomorphie) de la forme sur $V$ implique la méromorphie (resp. holomorphie) de sa trace sur la grassmanienne.

# 2 Considérations sur les ensembles analytiques

**Définition 1** *Un ensemble $V$ est un sous-ensemble analytique d'un domaine $D$ de $\mathbb{C}^{n+p}$ si en tout point de $V$ il existe un voisinage $U$ de ce point dans $\mathbb{C}^{n+p}$ et des fonctions $f_i$, $i = 1, ..., M$, analytiques dans $D$, telles que*

$$V \cap U = \{Z \in D\,;\, f_i(Z) = 0 \quad \forall i = 1, ..., M\}\,.$$

Raisonnons maintenant localement. Si nous appellons I l'idéal engendré par $f_1, ..., f_M$ , on a $V \cap U = Z(I)$, où Z(I) désigne l'ensemble des points de $D$ annulés par tous les éléments de I. Dans toute la suite de l'exposé, nous ne ferons que des considérations locales et nous supposerons $V = Z(I)$, ce qui présuppose que les ensembles analytiques avec lesquels nous travaillons sont fermés.

Soit $P \in V$ ; notons $\mathcal{O}_{n+p,P}$ l'anneau des germes des fonctions holomorphes (en $n+p$ variables) au voisinage de $P$. Soit $I_P$ le localisé de $I$ en $P$ et

$$\mathrm{Rad}\,(I_P) = \mathcal{P}_{P,1} \cap ... \cap \mathcal{P}_{P,s(P)}$$

la décomposition de $I_P$ en idéaux premiers minimaux associés (dans l'anneau $\mathcal{O}_{n+p,P}$). Le germe de $V$ en $P$ s'écrit alors

$$V_P = Z(I_p) = Z(\mathcal{P}_{P,1}) \cup ... \cup Z(\mathcal{P}_{P,s(P)})\,,$$

où les $Z(\mathcal{P}_{P,i})$, $i = 1, ..., s(P)$, sont les composantes irréductibles de $V_P$.

**Définition 2** *Nous appellons dimension de $V$ en $P$ le nombre*

$$\dim V_P := \text{dimension de Krull de}\, \mathcal{O}_{n+p,P}/I_P\,.$$

*Nous définissons alors* $\dim V := \sup_{P\in V} \dim V_P$. *Nous disons que* $V$ *est de dimension pure* $n$ *si*

$$\dim V_P = \text{dimension de Krull de}\, \mathcal{O}_{n+p,P}/\mathcal{P}_{P,i} = n$$

*pour tout* $i = 1, ..., s(P)$ *et pour tout* $P \in V$.

Nous travaillerons ici au voisinage d'un point de $V$ que nous pourrons supposer être l'origine dans $\in \mathbb{C}^{n+p}$ et nous supposerons dans cette partie que $V = Z(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{n+p}$, l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de 0 ; nous noterons encore $V$ ce germe d'ensemble analytique irréductible de dimension pure $n$.

**Théorème 1** [7], III, A. *Soit* $\mathcal{P}$ *un idéal premier de* $\mathcal{O}_N$, $N \geq 0$. *Alors il existe un système de coordonnées* $(z_1, z_2, ..., z_N)$ *(dit régulier pour* $\mathcal{P}$*) un entier positif ou nul* $n \leq N$ *tels que :*

- *i)* $\mathcal{P} \cap \mathcal{O}_n = (0)$ *;*
- *ii)* $\mathcal{O}_N/\mathcal{P}$ *est entier sur* $\mathcal{O}_n$ *;*
- *iii) Si nous notons* $\mathcal{F}_N$ *et* $\mathcal{F}_n$ *les corps de fractions respectifs de* $\mathcal{O}_N/\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{O}_n$, *nous avons alors* $\mathcal{F}_{n+p} = \mathcal{F}_n[\eta_{n+1}]$, *avec* $\eta_{n+1} = \pi(z_{n+1})$, *où* $\pi$ : $\mathcal{O}_N \to \mathcal{O}_N/\mathcal{P}$ *est la surjection naturelle si* $n < N$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_n$ *si* $n = N$.

**Preuve.** Par récurrence sur $N$, nous allons montrer *i)*, *ii)*, ainsi que

$$iv) \quad \mathcal{O}_N/\mathcal{P} = \mathcal{O}_n[\eta_{n+1}, ..., \eta_N]\,,\ \text{où}\ \eta_j = \pi(z_j)\,,\ j = n+1, ..., N\,.$$

Si $\mathcal{P} = (0)$ ou $\mathcal{P} = \mathcal{O}_N$, nous prenons respectivement $n = N$ et $n = 0$. Nous supposons donc que $\mathcal{P}$ est un idéal propre de $\mathcal{O}_N$.

Si $N = 0$, $\mathcal{O}_N = \mathbb{C}$ n'a pas d'idéal propre et c'est fini. Supposons $N \geq 1$ et *i), ii), iv)* vraies pour tout idéal premier de $\mathcal{O}_{N-1}$.

Soit alors $\mathcal{P}$ un idéal propre de $\mathcal{O}_N$ et $f \in \mathcal{P}$, $f \neq 0$. Nous pouvons supposer, après un nombre fini de changements de variables linéaires, que f est $z_N$-régulière d'ordre $r$, c'est-à-dire, d'après le théorème de préparation de Weierstrass ([7],II,B), que nous avons $f = ug$, où $u \in \mathcal{O}_N^*$ et $g$ est un polynome distingué dans $\mathcal{O}_{N-1}[z_N]$ qui s'écrit

$$g(z) = z_N^r + \sum_{i<N} a_i z_N^i\,,\ a_i \in \mathcal{O}_{N-1},\ a_i(o) = 0\,.$$

Puisque $u$ est inversible, $g \in \mathcal{P}$. L'idéal $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cap \mathcal{O}_{N-1}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{N-1}$ qui vérifie, d'après l'hypothèse de récurrence, qu'il existe $n \leqslant N-1$ tel que :

a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{O}_n = (0)$ ;

b) $\mathcal{O}_N/\mathcal{P}'$ est entier sur $\mathcal{O}_n$ ;

c) $\mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P}' = \mathcal{O}_n[\eta_{n+1}, ..., \eta_{N-1}]$, où $\eta_j = \pi(z_j)$, $j = n+1, ..., N-1$, où $\pi : \mathcal{O}_{N-1} \to \mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P}'$ est la surjection naturelle (lorsque $n < N-1$).

Puisque $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_{N-1}$, nous avons $\mathcal{P} \cap \mathcal{O}_n = \mathcal{P}' \cap \mathcal{O}_n = (0)$, ce qui prouve *i)*. Soit maintenant $h \in \mathcal{O}_N$. Par le théorème de division ([7],II,B), $h$ s'écrit :

$$h = g\widetilde{h} + \sum_{i<r} b_i z_N^i \, , \; b_i \in \mathcal{O}_{N-1} \, , \; \widetilde{h} \in \mathcal{O}_N \, ,$$

d'où

$$\pi(h) = \sum_{i<r} \pi(b_i)\eta_N^i \; ;$$

ainsi, tout élément de $\mathcal{O}_N/\mathcal{P}$ est un polynôme en $\eta_N$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P}$. Or $g = z_N^r + \sum_{i<r} a_i z_N^i$ , d'où

$$0 = \eta_N^r + \sum_{i<r} \pi(a_i)\eta_N^i \, , \; \pi(a_i) \in \mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P} \, .$$

Donc $\eta_N$ est entier sur $\mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P} = \mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P}'$ qui l'est sur $\mathcal{O}_m$, ce qui prouve prouve *(ii)*. Nous avons montré de plus que

$$\mathcal{O}_N/\mathcal{P} = \Big(\mathcal{O}_{N-1}/\mathcal{P}\Big)[\eta_N] = \mathcal{O}_N[\eta_{n+1}, ..\eta_N]$$

par c) et *iv)* est aussi prouvé. Montrons finalement *iii)*. Nous avons

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_N(\eta_{n+1}, ..\eta_N) \, ,$$

où les $\eta_i$ sont algébriques sur $\mathcal{O}_n$, donc $[\mathcal{F}_N : \mathcal{F}_n] < \infty$. Par le théorème de l'élément primitif ([13],6) il existe $(c_i)_{i=n+1,\dots,N}$ tels que

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_n\Big(\sum_{i=n+1}^{N} c_i\eta_i\Big) \, .$$

En posant alors $z'_{n+1} = \sum_{i=n+1}^N c_i z_i$ et en choisissant $z'_{n+2},..z'_N$ de manière à obtenir une nouvelle base de $\mathbb{C}^N$, le nouveau système de coordonnées ainsi obtenu vérifie toujours *i)* et *ii)* et nous avons de plus

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_n\Big(\sum_{i=n+1}^N c_i\eta_i\Big) = \mathcal{F}_N(\pi(z'_{n+1}))\,,$$

ce qui nous donne bien *iii)*. La preuve inductive du théorème 1 est ainsi terminée. $\diamondsuit$

Nous introduisons maintenant les polynômes minimaux $q_j(X) \in \mathcal{O}_n[X]$ des $\eta_j$, $j = n+1, ..., N$ (vus comme éléments de $\mathcal{O}_N/\mathcal{P}$ entiers sur $\mathcal{O}_n$) et nous notons $r_j$ leurs degrés. Puisque $\eta_j \in \mathcal{O}_n[\eta_{n+1}]$, $j = p+2, ..., N$, nous savons qu'il existe des polynômes $T_j \in \mathcal{O}_n[X]$ tels que

$$\eta_j = \frac{T_j(\eta_{n+1})}{\delta}\,,$$

où $\delta \in \mathcal{O}_n$ est le discriminant de $q_{n+1}(z_{n+1})$ [17].

**Théorème 2** *Les deux familles d'éléments de $\mathcal{O}_N$ que sont*

$$I_1 := \Big(q_{n+1}(z_{n+1}), .., q_n(z_n), \delta(z)z_{n+2} - T_{n+2}(z_{n+1}), .., \delta(z)z_N - T_N(z_{n+1})\Big)$$

*et*

$$I_2 := \Big(q_{n+1}(z_{n+1}), \delta(z)z_{n+2} - T_{n+2}(z_{n+1}), ..., \delta(z)z_N - T_N(z_{n+1})\Big)$$

*définissent le même germe d'ensemble analytique que $\mathcal{P}$ en dehors du lieu discriminant $\{\delta = 0\} \subset \mathbb{C}^n$.*

**Preuve.** Nous admettons ce résultat ici ; la démonstration n'est pas difficile, nous la trouverons par exemple dans [7]. $\diamondsuit$

**Remarque 1.** Ceci permet de démontrer rapidement le nullstellensatz pour les idéaux premiers [7], c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{O}_N$ s'annulant sur $V(\mathcal{P})$ appartient automatiquement à $\mathcal{P}$.

**Remarque 2.** L'entier $n$ attaché à $\mathcal{P}$ dans le théorème 1 est la dimension de Krull de $\mathcal{P}$ (voir le théorème 3 ci-dessous) ; remarquons que nous pouvons, étant donnés plusieurs idéaux premiers $\mathcal{P}_1$,...,$\mathcal{P}_s$, de même dimension $n$, trouver un système de coordonnées régulier pour chacun d'eux.

**Définition 3** *Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}_{n+p}$ muni d'un système de coordonnées régulier $z_1, ..., z_{n+p}$ pour un idéal $\mathcal{P}$ de dimension de Krull $n$ dans $\mathcal{O}_{n+p}$ (nous gardons les mêmes notations que ci-dessus excepté que maintenant $N = n + p$). Une représentation admissible pour $\mathcal{P}$ consiste en :*

*i) un polydisque $\Delta(0, r) = \Delta_n(0, r') \times \Delta_p(0, r'')$, où $\Delta_n(0, r') \subset \mathbb{C}^n$ et $\Delta_p(0, r'')$ sont des polydisques respectivement dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$, avec $r = (r', r'')$,*

*ii) des représentants (notés de la même manière) des germes des fonctions $q_j$ et $T_j$, $j = n + 1, ..., n + p$ dont les coefficients sont holomorphes dans $\Delta_n(0, r')$,*

*iii) un représentant du discriminant $\delta(z_1, ..., z_n)$, holomorphe dans $\Delta_n(0, r')$,*

*tels que, si $a \in \Delta_n(0, r')$ et si $b_{n+1}, ..., b_{n+p} \in \mathbb{C}$ vérifient vérifient $q_j(a; b_j) = 0$ pour $j = n + 1, ..., n + p$, alors $\mid b_j \mid < r_j$ pour $j = n + 1, ..., n + p$.*

**Lemme 1** *Étant donné un système de coordonnées régulier pour $\mathcal{P}$ de dimension $n$ dans $\mathcal{O}_{n+p}$, alors :*

*i) $\exists r_1, ..., r_{n+p} > 0$ (arbitrairement petits) tels que*

$$\Delta(0, r) = \Delta_n(0, r') \times \Delta_p(0, r'')$$

*réalise, avec les $q_j$ et $T_j$ correspondants, une représentation admissible pour $\mathcal{P}$ ;*

*ii) l'ensemble*

$$\{z \in \Delta(0, r); q_{p+1}(z) = 0,\ \delta(z)z_j - T_j(z) = 0,\ \delta(z) \neq 0,\ j = p + 2, ..., n\}$$

*est un représentant du germe de l'ensemble analytique $Z(\mathcal{P}) - Z(\delta)$ que nous noterons $V - V(\delta)$.*

**Preuve.** La possibilité de réaliser la clause *i)* est une application du théorème de Rouché que nous ne montrerons pas [7]. La possibilité de réaliser la clause *ii)* est une conséquence immédiate du théorème 2. $\diamondsuit$

**Théorème 3** *Soit* pr $: \mathbb{C}^{n+p} \to \mathbb{C}^n$ *la projection canonique et soit $m$ le degré de $q_{n+1}$. Alors* *i)* $V \setminus V(\delta)$ *est une variété analytique lisse de dimension pure* $n$ *et*

$$\mathrm{pr}\ : V \setminus V(\delta) \to \Delta_n \setminus \{\delta = 0\}$$

*est un revêtement à* $m$ *feuillets ;*

*ii) la restriction de l'application* pr *à la fermeture* $\bar{V}$ *de* $V \setminus V(\delta)$ *dans* $\Delta(0,r)$ *est propre ;*

*iii)* $V \setminus V(\delta)$ *est connexe et* $\bar{V}$ *est un représentant de* $Z(\mathcal{P})$*.*

**Preuve.** Nous ne prouverons que *i)*. Notons tout d'abord que $\delta$ étant continu non identiquement nul, $\Delta_n(0,r') - \{\delta = 0\}$ est un ouvert dense de $\Delta_n(0,r')$. Soit a=$(a_1,..,a_n) \in \Delta_n(0,r')$ tel que $\delta(a) \neq 0$. Soient $b_{n+1}^{(i)},\ i = 1,..,m$ les $m$ racines distinctes de $q_{n+1}(a,X) = 0$. Soit

$$b_j^{(i)} = \frac{T_j(a, b_{n+1})}{\delta(a)}\,,\ j = n+1,...,n+p\,,\ i = 1,...,m\,,$$

et $b^i = (a, b_{p+1}^{(i)},..,b_n^{(i)})$, $i = 1,...,m$. Nous avons alors :

$$V \cap \mathrm{pr}^{-1}(a) = \{(a, b_{p+1}^{(i)},..,b_n^{(i)})\,;\, i = 1,..,s\} = \{b^1,..,b^s\}\,.$$

Puisque les $\delta(a) \neq 0$, nous avons :

$$\frac{\partial q_{n+1}(a,X)}{\partial X}(b_{n+1}^{(i)}) \neq 0 \quad \forall i = 1,..,m\,,$$

et, suivant le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $U_i \subset \Delta_n(0,r')$ de $a$, un voisinage $v_i$ de $b_{n+1}^{(i)}$ dans $\mathbb{C}$, et une fonction $h_i$, holomorphe dans $U_i$, tels que, si nous notons $z' = (z_1,..z_p)$ nous ayions :

$$\forall z' \in U_i\,,\ \forall z_{n+1} \in v_i\,,\quad q_{n+1}(z', z_{n+1}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_{n+1} = h_i(z')\,.$$

Soit alors U :=$U_1 \cap \cdots \cap U_m$ et

$$W_i := \{z \in \mathrm{pr}^{-1}(U)\,;\, z_{n+1} = h_i(z'),\ z_j = T_j(h_i(z')/\delta(z')),\ j = n+2,..,n+p\}\,.$$

Nous avons alors par le lemme 1, pour $i = 1,...,s$ :

$$z \in W_i \ \Rightarrow\ z \in \mathrm{pr}^{-1}(U) \cap V$$

(en notant que $\mathrm{pr}(z) \in U \Rightarrow \; \delta(z') \neq 0)$ et

$$z \in pr^{-1}(U) \cap V \Rightarrow \; \exists \, i \in \{1, .., m\} \; tel \; que \; z \in W_i \, ,$$

d'où $\mathrm{pr}^{-1}(U) \cap V = W_1 \cup .. \cup W_m$. Or, comme $h_{i_1}(a) \neq h_{i_2}(a)$ si $i_1 \neq i_2$, nous pouvons, quitte à restreindre $U_i$ et $U_j$, supposer les $W_i$ disjoints deux à deux. Les $W_i$ sont alors des sous-variétés complexes (lisses) de dimension $n$ de $\Delta(0, r)$ difféomorphes aux ouverts $\mathrm{pr}\, W_i$ de $\Delta_n(0, r')$ par la projection (à fibres discrètes et de cardinal $n$) :

$$\mathrm{pr} \; : \; W_i \; \rightarrow \; \mathrm{pr}\,(W_i) \subset \Delta_n(0, r') \, ,$$

$$\Big( z', h_i(z'), \frac{T_{n+2}(z')}{\delta(z')}, .., \frac{T_{n+p}(z')}{\delta(z')} \Big) \mapsto z' \, .$$

Ainsi, $(V \setminus V(\delta), \mathrm{pr})$ est bien un revêtement à $m$ feuillets d'un ouvert de $\Delta_m(0, r')$ pour la projection naturelle sur les $m$ premières coordonnées. Nous admettons ici les assertions *ii)* et *iii)* ([7],III,A). $\diamondsuit$

**Remarque 3.** Le nombre de feuillets $m$ du revêtement dépend du choix des coordonnées (ce qui n'est pas le cas de $n$, qui lui représente la dimension de $V = V(\mathcal{P})$), mais il reste le même pour tout choix générique de coordonnées régulières (notons que nous pourrions montrer que tout choix générique de coordonnées se trouve de fait régulier) et correspond alors à la multiplicité de l'idéal $\mathcal{P}$ (qui est aussi le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel [1] associé à l'anneau local $\mathcal{O}_{n+p}/\mathcal{P}$).

**Définition 4** *Un revêtement analytique est par définition un triplet* $(V, \pi, U)$ *vérifiant :*

*i)* *$V$ est un espace séparé localement compact ;*

*ii)* *$U$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ ;*

*iii)* *l'application $\pi \; : \; V \rightarrow U$ est continue, propre, surjective et à fibres discrètes ;*

*iv)* *il existe un sous-ensemble $A$ de $U$ négligeable et un entier positif $m$ tels que $\pi \; : V \setminus \pi^{-1}(A) \rightarrow U \setminus A$ soit un revêtement à $m$ feuillets.*

*v)* *$V \setminus \pi^{-1}(A)$ est dense dans $V$.*

*L'ensemble $A$ s'appelle alors l'ensemble critique du revêtement $(V, \pi, U)$.*

**Remarque 4.** Étant donné un tel revêtement analytique, l'ensemble $V \setminus \pi^{-1}(A)$ est alors automatiquement une variété (lisse) complexe de dimension pure $n$ car $\pi$ est un difféomorphisme analytique local.

Par le théorème 3, nous voyons donc qu'un sous-ensemble analytique irréductible (ensemble des zéros d'un idéal premier $\mathcal{P}$ de $\mathcal{O}_{n+p}$) est en fait localement (pour un bon choix des coordonnées) un revêtement analytique $(V, \pi, U)$ de lieu singulier se projetant via $\pi$ dans l'ensemble critique $\{\delta = 0\}$, donc inclus dans une hypersurface $W$ de $V$.

Si maintenant $V = Z(\mathcal{P}_1) \cup .. \cup Z(\mathcal{P}_s)$ est réunion d'ensembles analytiques irréductibles de même dimension pure $n$, nous pouvons montrer qu'il existe un système de coordonnées régulier et une représentation admissible $(\Delta, \Delta_n)$ valable <u>pour tous</u> les $\mathcal{P}_i$. Ainsi les $Z(\mathcal{P}_i) \setminus Z(\delta_i)$ seront des variétés complexes lisses de dimension $n$ et les $\pi_i$ associés seront des revêtements à $m_i$ feuillets. Nous définissons alors, si $\delta$ désigne le produit des discriminants $\delta_i$ en $z_1, ..., z_n$), l'application $\pi \; : V \setminus V(\delta) \to \Delta_n \setminus V(\delta)$ qui à $z$ associe $\pi_i(z)$ si $z \in Z(\mathcal{P}_i) \setminus Z(\delta_i)$. Cette définition est bien cohérente car

$$(Z(\mathcal{P}_i) \setminus Z(\delta)) \cap (Z(\mathcal{P}_j) \setminus Z(\delta)) = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

En effet, si un sous-ensemble analytique $Z$ (tel $Z(\mathcal{P}_i) \cup Z(\mathcal{P}_j)$) n'est pas irréductible en un point $P$ (ce qui est le cas par exemple si $P \in Z(\mathcal{P}_i) \cap Z(\mathcal{P}_j)$), alors ce point est un point singulier de $Z$ ; dans notre cas ($Z = Z(\mathcal{P}_i) \cup Z(\mathcal{P}_j)$), nous avons donc $\delta_i(z)\delta_j(z) = 0$, soit $\delta(z) = 0$. Nous définissons donc bien ainsi un revêtement à $m := \Sigma m_i$ feuillets.

Soit $V$ un ensemble analytique d'un domaine $D$ de $\mathbb{C}^{n+p}$ de dimension pure $n$. Puisque nous raisonnerons localement tout au long de notre étude, nous supposerons que la projection sur les $n$ premières coordonnées représente $V$ comme un revêtement analytique de $\Delta_n(0, r')$ de lieu singulier inclus dans un sous-ensemble analytique $W$ de dimension $\dim W < n$ (se projetant via la projection attachée au revêtement $z \to z'$ en l'hypersuface de $\Delta_n(0, r')$ définie par l'annulation d'un produit de discriminants). Ainsi $(z_1, .., z_n)$ pourront être choisies comme coordonnées locales sur $V \setminus W$.

Faisons une dernière remarque qui nous sera utile par la suite :

**Remarque 5.** À propos du cas "intersection complète" : nous dirons que $V$ définit une intersection complète lorsque $V$ est donnée localement comme le lieu d'annulation de $p$ fonctions où $p = codim\, V$. Ce cas est intéressant car il simplifie grand nombre de problèmes (c'est la généralisation naturelle du cas où $V$ est une hypersurface. Or il est connu ([6], page 72) que tout ensemble analytique $V$ de codimension pure $p$ peut être réalisé dans un voisinage $U_a$ (dans l'espace ambiant) de chacun de ses points $a$ comme l'union de certaines branches irréductibles d'une intersection complète

$$V' = \{z \ \in \ U_a \ \ ; f_1(z) = ... = f_p(z) = 0\}\,,$$

où $df = df_1 \wedge ... \wedge df_p$ ne s'annule identiquement sur aucune des composantes irréductibles de $V$ dans $U_a$.

# 3 Formes méromorphes sur un ensemble analytique

Nous allons définir ici la notion de $(q, 0)$-forme méromorphe sur un ensemble analytique de différentes façons qui se trouvent coïncider.

Nous savons déjà qu'une singularité $z_0$ d'une fonction holomorphe $\psi$ d'une variable est un pôle si et seulement s'il existe un réel positif $a$ tel que $|\psi(z)| = O(r^{-a})$ quand la distance $r = |z - z_0|$ tend vers zéro. La fonction est alors holomorphe si nous pouvons prendre a=0. Nous aurons sur ce modèle de majoration une définition des formes méromorphes et holomorphes sur un ensemble analytique.

Nous pouvons caractériser aussi les fonctions méromorphes en terme de distributions : la fonction $\psi$ n'a pas de singularités essentielles dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}^{n+p}$ si et seulement s'il existe une distribution dans $D$ dont l'action sur les fonctions-test supportées par l'ouvert où $\psi$ est régulière coïncide avec celle de la distribution-fonction $[\psi]$. Nous pouvons alors expliciter une distribution particulière convenable appelée valeur principale et donnée par :

$$\phi \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|g|>\varepsilon} \psi(z)\phi(z) dz \wedge d\bar{z} \quad ,$$

où g est une fonction holomorphe s'annulant en les singularités de $\psi$ (nous supposons ici que la fonction $\psi$ est définie (et $C^\infty$) dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}^{n+p}$ éventuellement privé d'une hypersurface que nous dirons être le lieu polaire de $\psi$). La fonction $\psi$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $D$ si et seulement si cette distribution est $\bar{\partial}$-fermée.

Si $V$ est un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert $D$ de $\mathbb{C}^{n+p}$, de dimension pure égale à $n$, de lieu singulier $W$, Lelong a montré ([12],4) que $V$ définit un courant d'intégration (géométrique) $[V]$, de type $(p,p)$ dans $D$ ; ce courant est $\partial$ et $\overline{\partial}$-fermé et est de plus un courant positif (c'est-à-dire un courant dont les coefficients distributions sont localement des mesures positives), de support inclus dans $V$. Le courant d'intégration $[V]$ est d'ailleurs l'unique courant ayant ces propriétés ($d$-fermeture, positivité, support inclus dans $V$) prolongeant le courant défini dans l'ouvert $D \setminus W$ par

$$[V] \ : \phi \in C^{n,n}(D \setminus W) \to \int_V \phi \,.$$

Si $g$ est une fonction holomorphe au voisinage de $V$, s'annulant sur $W$, mais ne s'annulant sur aucune des composantes de $V$, nous pouvons montrer que le courant $[V]$ s'obtient comme la valeur principale

$$\phi \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{V \cap \{|g| > \varepsilon\}} \phi \quad ;$$

ceci ne dépend pas de la fonction $g$, pourvu qu'une telle fonction existe, ce qui est le cas si nous nous plaçons dans un contexte local ; nous montrerons plus loin pourquoi un tel courant valeur-principale existe, prolonge bien $[V]$ depuis $D \setminus W$, et remplit les propriétés exigées du courant d'intégration, à savoir la positivité, la $d$-fermeture, et le support dans $V$).

Si maintenant $\Psi$ est une forme-test dans $D$ divisée par une fonction holomorphe, M. Herrera [8] a montré qu'elle donne elle aussi naissance à un courant valeur principale :

$$\phi \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|g| > \varepsilon} \Psi \wedge \phi \quad ,$$

où g est une fonction holomorphe s'annulant sur le lieu polaire de $\Psi$ ; ce courant ne dépend d'ailleurs pas de la fonction $g$, nous y reviendrons.

Nous pourrons alors, en combinant ces deux derniers faits, définir un courant valeur principale du type $\Psi \wedge [V]$ permettant de caractériser les $(q,0)$-formes méromorphes sur un ensemble analytique $V$.

Par le biais de telles constructions, nous prouverons dans ce paragraphe l'équivalence des différentes notions de méromorphie sur un ensemble analytique. $V$ y désignera un sous-ensemble analytique complexe fermé de dimension pure $n$ dans un domaine $D$ de $\mathbb{C}^{n+p}$, et $W$ sera une hypersurface de $V$ contenant le lieu singulier de $V$.

**Théorème 4** ([9], théorème 1) *Soit $\psi$ une $(q,0)$-forme holomorphe définie sur la variété $V \setminus W$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i) la forme $\psi$ est localement la restriction à $V \setminus W$ d'une forme méromorphe $\Psi$ définie au voisinage de $V$ dans la variété ambiante $D$ ;*

*ii) pour tout point $z_0 \in W$ et pour tout sous-ensemble analytique $V'$ de $V$ de dimension $q$ non contenu dans $W$ mais passant par $z_0$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $z_0$ dans $V'$ et un nombre positif $a$ tels que*

$$\int_{U[r]} \psi \wedge \bar{\psi} = O(r^{-a}), \quad \textit{quand } r \to 0\,,$$

*où $U[r]$ est l'ensmble des points de $U$ à une distance au moins $r$ de $W$ (pour $p = 0$ nous demandons que $\psi(z) = O(|z - z_0|^{-a})$) ;*

*iii) pour toute résolution de singularités $\pi\ : \widetilde{V} \to V$, i.e une variété complexe $\widetilde{V}$ et une application propre, surjective et holomorphe $\pi$ qui envoie $\pi^{-1}(V_{\mathrm{reg}})$ biholomorphiquement sur $V_{\mathrm{reg}}$, le pull-back $\pi^*(\psi)$ admet un prolongement méromorphe à $\widetilde{V}$ ;*

*iv) le courant d'intégration*

$$\phi \to \int_{V \setminus W} \psi \wedge \phi$$

*est la restriction à $D \setminus W$ d'un courant $T$ défini au voisinage de $V$ dans la variété ambiante $D$ (i.e leurs actions sur les formes-test de support disjoint de $W$ coincident) ;*

*v) pour tout point $z_0$ de $W$, pour toute fonction holomorphe $g$ sur $D$ s'annulant sur $W$ au voisinage de $z_0$ mais non identiquement nulle sur chaque composante irréductible de $V$ dans ce voisinage, le courant valeur principale*

$$\phi \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{V \cap \{|g| > \varepsilon\}} \psi \wedge \phi$$

*existe au voisinage de $z_0$ (dans $D$) et est indépendant du choix de $g$.*

**Remarque 6.** La condition *iii)* a été proposée par Griffiths [5] ; la vision $L^2$ proposée en *ii)* figure aussi dans l'approche de Griffiths [5] ; elle soutend aussi l'approche postérieure de Barlet [2].

**Preuve.**

*Commençons par montrer que lorsque la variété $V$ est lisse, la condition ii) coïncide avec la caractérisation usuelle des formes méromorphes.*

*Montrons d'abord qu'une forme vérifiant ii) est bien méromorphe au sens usuel.*

Nous supposerons ici que $V$ est une variété analytique complexe lisse de dimension $n$ dans $D \subset \mathbb{C}^{n+p}$. Soit $\psi$ une $(q,0)$-forme holomorphe sur la variété $V \setminus W$ et vérifiant de plus la condition *ii)*. Puisque $V$ est lisse, nous travaillerons localement sur $V$ en supposant que les coordonnées locales sont $z = (z_1, ..., z_n)$.

Soit $z_0 \in W_{reg}$. Puisque nous raisonnons localement sur la variété lisse $V$, nous pouvons supposer que $z_0 = 0$ et que nous travaillons dans le polydisque $n$-dimensionnel $\Delta_n(R)$ centré en 0, de multirayon $(R, ..., R)$ (pour nous $\Delta_i(R)$ sera le polydisque $i$-dimensionnel centré en 0 et de multirayon $(R, ..., R)$ dans l'espace des variables $(z_1, ...., z_i)$), polydisque dans lequel $W_{\rm reg}$ (c'est-à-dire $W$) se présente localement au voisinage de 0 comme le sous-ensemble de $\Delta_n(R)$ donné par $\{z_n = 0\}$. Notons alors $\Delta_{i,r,R} = \Delta_i(R) \times \{r < |z_n| < R\}$. La $(q,0)$-forme $\psi$ (supposée holomorphe dans $V \setminus W$) s'écrit donc

$$\sum_{|I|=q} h_I(z) dz_I$$

sur $\Delta_{n-1,0,R}$, où les $h_I$ sont holomorphes dans $\Delta_{n-1,0,R}$. Nous voulons montrer que le fait que $\psi$ satisfasse à la clause *ii)* implique que les fonctions $h_I$ se prolongent toutes au voisinage de $z_n = 0$ en des fonctions méromorphes.

Notons $z = (z', \widetilde{z}, z_n)$, où $z' = (z_1, .., z_{n-q})$ *et* $\widetilde{z} = (z_{n-q+1}, .., z_{n-1})$. Soit, pour $z' \in \Delta_{n-q}(R)$ fixé, $E_L(z')$ le sous-espace affine de $\mathbb{C}^n$ de dimension $q$ donné (en les variables $\zeta = (\zeta_1, ...., \zeta_{n-q}, \widetilde{\zeta}, z_n)$, où $\widetilde{\zeta} := (\zeta_{n-q+1}, ..., \zeta_{n-1})$) par les équations

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z'_1 + L_1(\widetilde{\zeta}) \\ &\vdots \\ \zeta_{n-q} &= z'_{n-q} + L_{n-q}(\widetilde{\zeta}) \end{aligned}$$

où $L_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{q-1}, \mathbb{C})$, $i = 1, ..., n-q$, sont des formes linéaires $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes. Soit $\pi_{z'} : \mathbb{C}^q_{\widetilde{\zeta}, z_n} \to E_L(z')$ l'application biholomorphe définie par

$$\pi_{z'}(\widetilde{\zeta}, z_n) \to (z'_1 + L_1(\widetilde{\zeta}), .., z'_{n-q} + L_{n-q}(\widetilde{\zeta}), \widetilde{\zeta}, z_n)\,.$$

Nous pouvons alors, sur l'ouvert $\pi_{z'}^{-1}(\Delta_{n-1,0,R} \cap E_L(z'))$, considérer le pull-back de $\psi$ par $\pi_{z'}$ :

$$\pi_{z'}^*(\sum_{|I|=q} h_I(z)dz_I) = \sum_{|I|=q} c_I(h_I \circ \pi_{z'})(\widetilde{\zeta}, z_n)d\widetilde{\zeta} \wedge dz_n =: f_L(z', \widetilde{\zeta}, z_n)d\widetilde{\zeta} \wedge dz_n$$

où $f_L := \sum_{|I|=q} c_I h_I$ est holomorphe en $z'$ dans un voisinage (dans $\mathbb{C}^{n-q}$) de 0 et les $c_I$ sont des constantes liées aux applications linéaires $L_i$ mais indépendantes de z'; nous pouvons supposer que ce voisinage contient un polydisque $\Delta_{n-q}(\widetilde{R})$, et ce pour tout choix de $L$, les $L_i$ appartenant à un certain ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{q-1}, \mathbb{C})$. Notons, toujours pour $z' \in \Delta_{n-q}(\widetilde{R})$ et $L$ ainsi choisi,

$$U_L(z', r) := \pi^{-1}(\Delta_{n-1,r,\widetilde{R}} \cap E_L(z'))\,.$$

Il existe alors, (quitte à restreindre $\widetilde{R}$ et l'ouvert $\mathcal{V}$) deux réels $0 < R', R'' \leq \widetilde{R}$ tels que

$$\Delta_{q-1,r,R'} \subset \cap_{\{z' \in \Delta_{n-q}(R''),\, L_i \in \mathcal{V}\}}\, \pi^{-1}(\Delta_{n-1,r,\widetilde{R}} \cap E_L(z')).$$

Alors nous avons, pour tout $z' \in \Delta_{n-q}(R'')$ et pour tout $L_i \in \mathcal{V}$, suivant l'hypothèse *ii)* :

$$\begin{aligned} O_{L,z'}(r^{a_{L,z'}}) &= \left| \int_{\Delta_{n-1,r,\widetilde{R}} \cap E_L(z')} \Big( \sum_{|I|=q} h_I dz_I \Big) \wedge \Big( \sum_{|J|=q} \overline{h_J dz_J} \Big) \right| \\ &= \left| \int_{U_L(z',r)} |f_L(z', \cdot)|^2 d\widetilde{z} \wedge \overline{d\widetilde{z}} \wedge dz_n \wedge \overline{dz_n} \right| \\ &\geq \left| \int_{\Delta_{q-1,r,R'}} |f_L(z', \cdot)|^2 d\widetilde{z} \wedge \overline{d\widetilde{z}} \wedge dz_n \wedge \overline{dz_n} \right|. \end{aligned}$$

Nous déduisons de cela que l'ensemble

$$A_L(z') = \left\{ \widetilde{z} \in \Delta_{q-1}(R'')\,;\, \left| \int_{\{r<|z_n|<R'\}} |f_L(z', \cdot)|^2 dz_n \wedge \overline{dz_n} \right| \geq r^{-a_{L,z'}-1} \right\}$$

est de mesure de Lebesgue $2(q-1)$-dimensionnelle $\nu(A_L(z'))$ nulle ; en effet, si ce n'était pas le cas, nous aurions, du fait de l'inégalité précédente :

$$0 < \frac{\nu(A_L(z'))}{r^{a_{L,z'}+1}} \leq \left| \int_{\Delta_{q-1,r,R'}} |f_L(z', \cdot)|^2 d\widetilde{z} \wedge \overline{d\widetilde{z}} \wedge dz_n \wedge \overline{dz_n} \right| \leq \frac{C_L(z')}{r^{a_{L,z'}}} \quad \forall r > 0$$

pour une certaine constante $C_L(z') > 0$, ce qui est absurde.

La fonction $z_n \to f_L(z', \widetilde{z}, z_n)$ étant holomorphe dans la couronne $\{r < |z_n| < R'\}$, elle se développe dans cette couronne en série de Laurent

$$f_L(z', \widetilde{z}, z_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{L,k}(z', \widetilde{z}) z_n^k$$

dont les coefficients $a_{L,k}$ dépendent holomorphiquement de $(z', \widetilde{z})$ dans le polydisque $\Delta_{n-1}(\mathcal{R})$, où $\mathcal{R} = \inf(R', R'')$. En posant $z_n = \rho e^{i\theta}$, la formule de Plancherel nous donne

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_k a_{L,k} \rho^k e^{ik\theta} \Big|^2 d\rho = 2\pi \sum_k |a_{L,k}|^2 \rho^{2k} ,$$

d'où il résulte :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{r<|z_n|<\mathcal{R}\}} |f_L(z', \cdot)|^2 dz_n \wedge d\bar{z}_n \right| &= \left| 2i \int_r^{\mathcal{R}} 2\pi \sum_k |a_{L,k}(z', \cdot)|^2 \rho^{2k+1} d\rho \right| \\ &\geq 4\pi \int_r^{\mathcal{R}} \sum_{k<0} |a_{L,k}(z', \cdot)|^2 \rho^{2k+1} d\rho \\ &\geq 4\pi \sum_{k<0} \frac{|a_{L,k}(z', \cdot)|^2}{2|k+1|} r^{2(k+1)} ; \end{aligned}$$

ceci implique

$$\frac{|a_{L,k}(z', \cdot)|^2}{2(k+1)} \times \frac{1}{r^{2(k+1)}} \leq r^{a_{L,z'}+1}$$

pour tout $k < 0$, $r > 0$ et pour tout $\widetilde{z}$ dans le complémentaire de $A_L(z')$, d'où il suit que $a_{L,k}(z', \cdot) \equiv 0$ (si $2k + 1 < -a_{L,z'} - 1$) sur $\Delta_{n-q}(\mathcal{R}) \times A_L(z')^c$, donc sur $\Delta_{n-q}(\mathcal{R}) \times A_L(z') = \Delta_{n-1}(\mathcal{R})$ par continuité puisque $\nu(A_L(z'))$=0. Comme les fonctions $a_{L,k}$ sont holomorphes en $z'$, nous pouvons montrer que

$$z' \to \min\{k \,;\, a_{L,k}(z', \cdot) \not\equiv 0\}$$

(fonction à valeurs entières) est en fait minorée sur $\Delta_{n-q}(\mathcal{R})$ par un entier négatif $-k_{L,0}$. La fonction $z_n \to z_n^{k_{L,0}} f_L(z', \widetilde{z}, z_n)$ se prolonge donc en une fonction holomorphe sur $\{|z_n| < \mathcal{R}\}$, et ce pour tout $(z_1, .., z_{n-1}) \in \Delta_{n-1}(\mathcal{R})$ et la fonction $z \to f_L(z)$ est en fait méromorphe dans un voisinage de 0. Or,

$f_L$ est combinaison linéaire des $h_I$ en fonction des coefficients de l'application linéaire $L$ de rang maximal. En choisissant suffisament d'applications $L$ vérifiant cela (toujours pour les $L_i$ dans l'ouvert $\mathcal{V}$), nous en déduisons que les $h_I$ sont méromorphes. La forme $\psi$ est donc méromorphe au voisinage de tout point de $W_{reg}$ et se prolonge en une forme méromorphe sur la variété lisse $V$ par le théorème de Hartogs puisque $\operatorname{codim}_V(W_{\text{sing}}) \geq 2$.

La forme $\psi$ est donc bien une forme méromorphe (au sens usuel) sur la variété lisse V.

*Montrons qu'une forme méromorphe au sens usuel sur une variété lisse vérifie bien ii).*

Supposons maintenant donnée une $(q,0)$-forme $\psi$ méromorphe sur la variété lisse $V$ au sens usuel. On veut montrer qu'elle vérifie *ii).*

Nous travaillerons encore dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^n$ (les coordonnées locales sur $V$ sont $z_1, ..., z_n$) dans lequel la forme s'écrit

$$\psi = \frac{1}{Q} \sum_{|I|=q} h_I(z) dz_I \,,$$

où $Q$ et les $h_I$ sont holomorphes dans $\mathcal{U}$. Nous supposerons que $\mathcal{U}$ est un voisinage de l'origine et que $Q(0) = 0$. Soit

$$\mathcal{U}(\epsilon) = \{z \in \mathcal{U}\,;\, d(z, \{Q = 0\}) > \epsilon\} \,.$$

Nous voulons montrer que pour tout sous-ensemble analytique $V'$ de $\mathcal{U}$ de dimension $q$ non contenu dans l'hypersurface $\{Q = 0\}$, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que :

$$\left| \int_{V' \cap \mathcal{U}(\epsilon)} \frac{1}{|Q|^2} \Big( \sum_{|I|=q} h_I dz_I \Big) \wedge \Big( \sum_{|I|=q} \overline{h_I dz_I} \Big) \right| \leq \frac{c}{\epsilon^a} \,.$$

Minorons pour cela $|Q|$ sur $\mathcal{U}(\epsilon)$. Quitte à restreindre $\mathcal{U}$ autour de 0 et à faire en sorte que $Q$ soit régulier (ce qui est toujours possible) nous avons par le théorème de préparation de Weierstrass :

$$\begin{aligned} Q(z) &= u(z)\,(z_n^M + a_1(z') z_n^{M-1} + \cdots + a_M(z')) \\ &= u(z)\,\Pi_{i=1}^M (z_n - \gamma_i(z'))\,, \quad z' = (z_1, ..z_{n-1}) \end{aligned}$$

où $a_i(0) = 0$, $i = 1, ..., M$, et

$$\prod_{i=1}^{M} (z_n - \gamma_i(z'))$$

est la factorisation du polynôme de Weierstrass associé à $Q$ et $u$ est holomorphe et ne s'annule pas dans $\mathcal{U}$ pour $\mathcal{U}$ assez restreint (car $u(0) \neq 0$). Ainsi, $\inf_{\{z \in \bar{U}\}} |u(z)| = \gamma > 0$ et $|Q(z)| \geq \gamma \prod_{i=1}^{M} |z_n - \gamma_i(z')|$. De plus, nous avons :

$$d(z, \{Q = 0\}) \leq d((z', z_n), (z', \gamma_i(z'))) \leq |z_n - \gamma_i(z')| \,, \ \forall i = 1, ..., M \,,$$

d'où

$$|Q(z)| \geq \gamma \, d(z, \{Q = 0\})^M \geq \gamma \, \epsilon^M, \quad \forall z \in \mathcal{U}(\epsilon) \,,$$

ce qui fait que nous obtenons pour $\epsilon \leq \epsilon_0$ la majoration

$$\left| \int_{V' \cap \mathcal{U}(\epsilon)} \psi \wedge \overline{\psi} \right| \leq \frac{1}{\gamma} \epsilon^{-M} \left| \int_{V' \cap \mathcal{U}(\epsilon_0)} \Big( \sum_{|I|=q} h_I dz_I \Big) \wedge \Big( \sum_{|I|=q} \overline{h_I dz_I} \Big) \right| \leq \frac{c}{\epsilon^M} \,.$$

Ceci nous donne bien la majoration voulue (nous utilisons la positivité de $2i\overline{\psi} \wedge \psi$).

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème 4.

*ii) $\Longrightarrow$ iii)*

Soit une $(q, 0)$-forme $\psi$ holomorphe sur $V \setminus W$ et vérifiant *ii)*.

Soit $\pi : \widetilde{V} \to V$ une résolution des singularités de V. Le pull-back $\pi^* \psi$ de $\psi$ via $\pi$ est une $(q, 0)$-forme holomorphe sur $\widetilde{V} \setminus \widetilde{W}$, où $\widetilde{W} = \pi^{-1}(W)$.

Soit $z_0 \in \pi^{-1}(W)$ et $\widetilde{Z}$ un $q$-sous-ensemble analytique passant par $z_0$ et non inclus dans $\pi^{-1}(W)$. Puisque $\pi$ est propre, $Z = \pi(\widetilde{Z})$ est un $q$-sous-ensemble analytique de $V$ par le théorème de Remmert ([7],V,C) et nous pouvons donc intégrer $\psi$ sur $Z \cap (V \setminus W)$.

Soit $\widetilde{\mathcal{U}}$ un voisinage relativement compact de $z_0$ dans $\widetilde{V}$ et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon) = \{ z \in \widetilde{\mathcal{U}} \,;\, d(z, \widetilde{W}) > \epsilon \} \,.$$

Montrons que l'on peut majorer $\int_{\widetilde{Z} \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon)} \pi^* \psi \wedge \overline{\pi^* \psi}$ par $c/\epsilon^b$ pour un certain réel $b$. Soit $\epsilon_0 > 0$ assez petit. Puisque $\pi$ est biholomorphe de $\widetilde{Z} \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon_0)$ sur

$\pi(\widetilde{Z} \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon_0))$, nous avons, pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, grâce à la positivité de la forme $\psi \wedge \bar{\psi}$ :

$$\left| \int_{\widetilde{Z} \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon)} \pi^*\psi \wedge \overline{\pi^*\psi} \right| = \left| \int_{\pi(\widetilde{Z} \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon))} \psi \wedge \overline{\psi} \right| \leq \left| \int_{\pi(\widetilde{Z}) \cap \pi(\widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon))} \psi \wedge \overline{\psi} \right| .$$

Puisque nous raisonnons localement, nous pouvons considérer que $W = \{h_1 = \cdots = h_M = 0\}$, où les $h_i \ : D \to \mathbb{C}$ sont holomorphes. Alors $\widetilde{W} = \{h_1 \circ \pi = \cdots = h_M \circ \pi = 0\}$, où les $h_i \circ \pi$ sont holomorphes sur $\widetilde{V}$. Soit $H := (h_1, .., h_M)$. Par le théorème de Lojasiewicz [15], la norme d'une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe (ici $\widetilde{V}$) et ̀valeurs dans $\mathbb{C}^M$, évaluée en un point $z$, est minorée (uniformément lorsque $z$ décrit un compact) à une constante multiplicative près par une puissance de la distance de $z$ aux zéros de cette fonction. En d'autres termes, nous avons ici :

$$\exists \gamma > 0, \ M \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \ \| H \circ \pi(z) \| \geq \gamma \, d(z, \widetilde{W})^M , \quad \forall z \in Z \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon_0) .$$

D'autre part, si $\zeta \in \widetilde{W}$, alors $H \circ \pi(\zeta) = 0$ et nous avons par le théorème des accroissements finis :

$$\| H \circ \pi(z) \| \leq \| \pi(z) - \pi(\zeta) \| \times \sup_{z \in \pi(\overline{\mathcal{U}})} \| dH(z) \| \leq C \, d(\pi(z), W) , \quad C \in \mathbb{R}^+ .$$

De ces deux inégalités, nous déduisons que, pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\pi(\widetilde{Z}) \cap \pi(\widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon)) \subset Z \cap \left\{ z \in \pi(\widetilde{\mathcal{U}}) \, ; \, d(z, W) > \frac{\gamma}{C} \times \epsilon^M \right\} ;$$

de ceci et du fait que $\psi$ satisfait *ii)*, nous déduisons, grâce encore à la positivité de la forme $\psi \wedge \overline{\psi}$, que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\left| \int_{\widetilde{Z} \cap \widetilde{\mathcal{U}}(\epsilon)} \pi^*\psi \wedge \overline{\pi^*\psi} \right| \leq \left| \int_{Z \cap \{d(z,W) \geq \gamma \epsilon^M / C\}} \psi \wedge \bar{\psi} \right| = O(\epsilon^{-aM})$$

La forme $\pi^*\psi$ vérifie donc la condition *ii)* sur la variété lisse $\widetilde{V}$ et, par ce que nous avons montré au préalable (premier point de cette preuve) se prolonge donc en une forme méromorphe sur cette variété, ce qui est bien l'assertion *iii)*.

<u>*iii)* $\Longrightarrow$ *ii)*</u>

Donnons-nous une résolution des singularités $(\widetilde{V}, \pi)$ de $V$.

Soit $\psi$ une forme holomorphe sur $V \setminus W$ vérifiant *iii)* et $z_0$ (que l'on supposera être l'origine dans $\mathbb{C}^{n+p}$) un point de $W$. Soit $Z$ un $q$-ensemble analytique de $V$, $\mathcal{V}$ un voisinage relativement compact de 0 dans $\mathbb{C}^{n+p}$ dans lequel $W$ est défini comme le lieu des zéros de $h_1, ..., h_M$, $\mathcal{U}$ sa trace sur $V$, et $\mathcal{U}(\epsilon) = \{z \in \mathcal{U}\,;\, d(z, W) > \epsilon\}$. Alors $\widetilde{W} := \pi^{-1}(W) = \{H \circ \pi = 0\}$ est un sous-ensemble analytique de $\widetilde{V}$ et la forme $\pi^*\psi$ est une $(q, 0)$-forme holomorphe sur $\widetilde{V} \setminus \widetilde{W}$ qui par hypothèses se prolonge en une $(q, 0)$-forme méromorphe sur la variété lisse $\widetilde{V}$.

Comme précédemment, nous avons alors $\| H(z) \| \geq C\, d(z, W)^N$ pour tout $z \in \mathcal{V}$ (en particulier pour tout $z \in \mathcal{U}$). Soit $z \in V \setminus W$ et $\widetilde{\zeta} \in \pi^{-1}(W)$, alors

$$\begin{aligned}
\| H \circ \pi(\pi^{-1}(z)) \| &= \| (H \circ \pi)(\pi^{-1}(z)) - (H \circ \pi)(\widetilde{\zeta}) \| \\
&\leq \| \pi^{-1}(z) - \widetilde{\zeta} \| \sup_{\xi \in \pi^{-1}(\overline{\mathcal{U}})} \|d(H \circ \pi)(\xi)\| \\
&\leq K \| \pi^{-1}(z) - \widetilde{\zeta} \|
\end{aligned}$$

pour un certain $K > 0$. Il résulte de cela que, pour tout $z \in \mathcal{U}$,

$$d(z, W) \geq \epsilon \Rightarrow d(\pi^{-1}(z), \pi^{-1}(W) \geq \frac{C\epsilon}{K}.$$

Les composantes de $\pi^{-1}(Z)$ non incluses dans $\widetilde{W}$ sont des sous-ensembles analytiques de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ de dimension $q$ (parce que $\pi$ réalise un biholomorphisme entre $\widetilde{V} \setminus \pi^{-1}(V_{\text{reg}})$ et $V_{\text{reg}}$) ; si nous notons $\widetilde{Z}$ l'union de ces composantes, nous avons

$$\begin{aligned}
\left| \int_{Z \cap \mathcal{U}(\epsilon)} \psi \wedge \overline{\psi} \right| &= \left| \int_{\widetilde{Z} \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}(\epsilon))} \pi^*\psi \wedge \overline{\pi^*\psi} \right| \\
&\leq \left| \int_{\widetilde{Z} \cap \{d(\widetilde{\zeta}, \widetilde{W}) \geq C\epsilon/K\}} \pi^*\psi \wedge \overline{\pi^*\psi} \right| = O(\epsilon^{-a})
\end{aligned}$$

puisque $\pi^*\psi$ est méromorphe sur $\widetilde{V}$ et donc vérifie *ii)* sur $\widetilde{V}$. Ceci montre que $\psi$ vérifie *ii)*.

**Remarque 7.** En fait, $\pi^* : \mathcal{M}^q(V) \to \mathcal{M}^q(\widetilde{V})$ est un isomorphisme (où $\mathcal{M}^q(V)$ est l'ensemble des $(q, 0)$-formes holomorphes sur $V \setminus W$ vérifiant *ii*).

En effet, nous avons montré que cette application était bien définie. Vérifions qu'elle est injective : si $\psi \in \mathcal{M}^q(V)$ vérifie $\pi^*\omega = 0$, nous avons en coordonnées locales

$$\pi^*\psi = \sum_{|I|=q} f_I(Z)dZ_I = \sum_{|I|=q} (f_I \circ \pi)(z)d\pi_I = 0\,;$$

Ainsi $f_I \circ \pi = 0$ sur le complémentaire du lieu critique de $\pi$ et $f_I = 0$ sur le complémentaire dans $V$ de l'image du lieu critique qui est de mesure nulle par le théorème de Sard, donc $f_I \equiv 0$ sur $V$ par continuité, d'où $\psi = 0$ et l'injectivité de $\pi^*$ est établie. Pour la surjectivité, choisissons $\omega \in \mathcal{M}^q(\widetilde{V})$ ; il suffit alors de poser $\psi = (\pi^{-1}_{|V\setminus W})^*.(\omega_{|\widetilde{V}\setminus\pi^{-1}(W)})$ et de remarquer que $\psi$ ainsi définie est holomorphe sur $V \setminus W$ et que $\pi^*\psi = \omega_{|\widetilde{V}\setminus\pi^{-1}(W)}$ se prolonge (par hypothèse sur $\omega$) en une $(q,0)$-forme $\omega$ méromorphe sur $\widetilde{V}$ ; la forme $\psi$ ainsi construite vérifie *iii)*, donc *ii)* et $\psi \in \mathcal{M}^q(V)$ et réalise un antécédent de $\omega$, ce qui montre la surjectivité de $\pi^*$.

<u>*iii)* $\Longrightarrow$ *i)*</u>

Nous nous plaçons au voisinage d'un point de $W$ (disons $z_0 = 0$, considéré comme point de $\mathbb{C}^{n+p}$) et nous pouvons supposer que, dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^{n+p}$ de l'origine, $W$ est défini comme

$$W = \{h_1 = \cdots = h_M = 0\}\,,$$

où les $h_i$ sont holomorphes sur $\mathcal{V}$ ; on note $\mathcal{U}$ la trace de $\mathcal{V}$ sur $V$.

Soit $\pi\ : \widetilde{V} \to V$ une résolution des singularités au dessus de $\mathcal{U}$.

Supposons d'abord que $q = 0$ (c'est le cas des fonctions). Alors $\pi^*\psi$ est par hypothèse une fonction méromorphe sur $\widetilde{V}$ dont le lieu polaire est inclus dans $\widetilde{W} := \pi^{-1}(W)$. Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, donc $\mathcal{U}$, nous pouvons supposer qu'il existe un entier $N$ tel que

$$[(h_1 \circ \pi)^N (\pi^*\psi)]$$

(considérée comme distribution dans $\widetilde{V} \setminus \widetilde{W}$) se prolonge en une distribution $T$ sur $\widetilde{V}$ telle que $\overline{\partial}T = 0$, donc (d'après l'hypoellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann [10]) en une fonction holomorphe sur $\widetilde{V}$. La fonction $h_1^N\psi$ est donc holomorphe dans $V\setminus W$ et localement bornée sur $V$ puisque $\pi^*[h_1^N\psi]$ l'est sur $\widetilde{V}$.

Montrons que de telles fonctions sont des restrictions de fonctions méromorphes définies dans un voisinage de $V$ (dans $\mathbb{C}^{n+p}$)(c'est le théorème d'Oka). Puisque nous sommes intéressés par une propriété locale, nous pouvons choisir les coordonnées

$$(z, w) = (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_p) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$$

dans l'espace ambiant, un polydisque $U = U_n \times U_p$, une intersection complète $V'$ tels que $(V' \cap U, \mathrm{pr},\ U_n)$ soit un revêtement analytique (au sens de la définition 4), où pr est la projection de $V' \cap U$ sur l'espace des $n$ premières coordonnées et $V \cap U$ est réunion de branches irréductibles de $V' \cap U$ (voir la remarque 5). Supposons

$$V' \cap U = \{(z, w)\ \in U\,;\ f_1(z, w) = ... = f_p(z, w) = 0\}$$

et soit $\mathrm{Disc} = \{\sigma(z) = 0\}$ le lieu discriminant de pr, c'est à dire l'image par pr de l'ensemble $U \cap V' \cap \{J = 0\}$ où

$$J = \mathrm{Jac}\left(\frac{\partial(f_1, ..., f_p)}{\partial(w_1, ..., w_p)}\right).$$

Nous avons alors le lemme suivant (avec les notations précédentes) :

**Lemme 2** *Toute fonction holomorphe $h$ sur la variété $V \setminus W$ admet un prolongement $\widetilde{h}$ holomorphe à $U \setminus \{(z, w)\,;\, z \in \mathrm{Disc}\}$. Si $h$ est localement bornée sur $V$, $h$ admet un prolongement méromorphe à $U$ ; plus précisément la fonction $J_{|_{V\setminus W}}\, h$ admet un prolongement holomorphe à $U$.*

**Preuve.** Soit

$$\mathrm{pr}^{-1}(\{z\}) = \{(z, w^{(k)}(z)),\ k = 1, .., N\}.$$

Pour les fonctions $f_i$ définissant $V$, écrivons (par exemple en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral) les formules de division dites formules d'Hefer :

$$f_i(z, u) - f_i(z, w) = \sum_{j=1}^{p} h_{ji}(z, w, u)(u_j - w_j)\,,\ i = 1, ..., p\,,\ z \in \mathbb{C}^n\,,\ u, w \in \mathbb{C}^p\,,$$

où les $h_{ji}$ sont holomorphes dans $U_n \times U_p \times U_p$. Notons $H$ le déterminant de la matrice $(h_{ji})_{j,i}$. Remarquons tout de suite que

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\,(z, w^{(k)}(z)) = h_{ji}(z, w^{(k)}(z), w^{(k)}(z))\,, \quad \forall z \in U_n \setminus \mathrm{Disc}$$

et que, toujours pour tout $z \in U_n \setminus \mathrm{Disc}$,

$$\begin{aligned} & f_i(z, w^{(k)}(z)) - f_i(z, w^{(l)}(z)) \\ & \quad = \sum_j h_{ji}(z, w^{(k)}(z), w^{(l)}(z))(w_j^{(k)}(z) - w_j^{(l)}(z)) = 0\,. \end{aligned}$$

Cette relation implique que pour $k \neq l$, les vecteurs $\Big(h_{ji}(z, w^{(k)}, w^{(l)})\Big)_i$, $j = 1, ..., p$, sont linéairement dépendants ; ainsi :

$$\begin{aligned} H(z, w^{(k)}, w^{(l)}) &= J(z, w^{(k)}) \text{ si } k = l \\ &= 0 \text{ si } k \neq l\,. \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer que notre fonction $h$ est définie sur la partie régulière de $V'$ en lui donnant la valeur 0 sur les composantes de $V'$ n'appartenant pas à $V$, ce qui nous permet ainsi de poser :

$$\widetilde{h}(z, w) = \sum_{k=1}^{N} H(z, w, w^{(k)}(z)) h(z, w^{(k)}(z)).$$

Cette fonction est bien définie. Elle est holomorphe dans $(U_n \setminus \mathrm{Disc}) \times U_p$. Elle l'est en effet en $w$ car les $h_{ji}$ le sont. L'holomorphie en $z \in U_n \setminus D$ vient du fait que $z = (z_1, .., z_n)$ définissent ici les coordonnées locales sur $V \setminus \{(z, w)\,,\, z \in \mathrm{Disc}\} \subset V \setminus W$, dont $h$ dépend holomorphiquement par définition même, et du fait que $\widetilde{h}$ est symétrique en les $(z, w^{(k)}(z))$ qui eux dépendent holomorphiquement des coordonnées locales $z$ dans $U \setminus \{(z, w)\,,\, z \in \mathrm{Disc}\}$. Or, nous avons

$$h = \left(\frac{\widetilde{h}}{J}\right)_{|V \setminus W},$$

ce qui démontre la première partie du lemme. Si $h$ est bornée localement, $\widetilde{h}$ l'est aussi et se prolonge en une fonction holomorphe à $U$ par le théorème de Riemann ([7],I,C) ce qui montre la seconde partie du lemme. $\diamondsuit$

**Remarque 7.** Ce lemme est une version locale du théorème d'Oka affirmant qu'en chaque point de $V \setminus W$, nous pouvons trouver un dénominateur universel $J$ holomorphe au voisinage de ce point (dans l'espace ambiant), valable pour toutes les fonctions $g$ holomorphes localement bornées sur $V \setminus W$ au voisinage de ce point (ou encore que le produit $g.J$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de ce point).

Dans notre situation, la fonction $h_1^N\psi$ définie et holomorphe sur $V \setminus W$ et localement bornée sur $V$ est donc la restriction d'une fonction méromorphe définie au voisinage de l'origine (dans $\mathbb{C}^{n+p}$).

Soit maintenant $\psi$ une $(q,0)$-forme holomorphe sur $V \setminus W$ telle que la clause *iii)* soit remplie. Suivant les considérations de la section 2 (voir en particulier ce qui suit la remarque 4) nous pouvons représenter $V$ comme un recouvrement analytique par la projection sur les n premières coordonnées sur un domaine U de $\mathbb{C}^n$ (de lieu singulier inclus dans $W$) et considérer sur $V$ les pull-backs $\psi_I$ par cette projection des formes standard $dz_I$. Les formes $\psi_I$ sont alors holomorphes dans un voisinage de $V$ et constituent une base des $(q,0)$-formes holomorphes sur $V \setminus W$ ; sur $V \setminus W$, nous pouvons écrire (quitte à restreindre encore $\mathcal{V}$)

$$\psi = \sum_{|I|=q} g_I \psi_I \,,$$

les coefficients $g_I$ étant holomorphes sur $V \setminus W$.

Il nous suffit alors de montrer que les $\pi^* g_I$ sont méromorphes sur $\widetilde{V}$ puisque nous avons déjà montré que les fonctions $g_I$ sont ainsi des restrictions de formes méromorphes et les formes $\psi_I$ l'étant clairement, la forme $\psi$ le sera.

Soit $I'$ le complémentaire de $I$ dans $\{1,..,n\}$ ; notons que

$$\pi^*(\psi) \wedge \pi^*(\psi_{I'}) = \pi^*(\psi \wedge \psi_{I'}) = \pi^*(g_I \psi_I \wedge \psi_{I'}) = \pi^*(g_I)\pi^*(\psi_I \wedge \psi_{I'})$$

est méromorphe sur $\widetilde{V}$. Sachant que $\pi^*(\psi_I \wedge \psi_{I'})$ est holomorphe, il suit que $\pi^* g_I$ est en fait méromorphe sur $\widetilde{V}$ et l'assertion est prouvée.

<u>*i)* $\Longrightarrow$ *v)*</u>

Pour prouver la première partie de cette assertion, nous pouvons nous placer dans le cas où $V$ est lisse et $\{g=0\}$ est à croisements normaux (c'est-à-dire se lit comme un monôme dans les cartes de $\widetilde{V}$).

En effet, par le théorème d'Hironaka, il existe une application $\pi$ propre, continue et surjective d'une variété lisse $\widetilde{V}$ (de dimension $n$) dans $V$ (au dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$ qui est la trace sur $V$ d'un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^{n+p}$ (disons que $\mathcal{V}$ est pour simplifier un voisinage de $0 \in W$ dans $\mathbb{C}^{n+p}$) telle que $\pi$ : $\widetilde{V} \setminus \pi^{-1}(W) \to V \setminus W$ soit un difféomorphisme (entre variétés lisses) et telle que $\{\pi^* g = 0\}$ soit à croisements normaux. Ainsi, pour toute forme-test $\psi$

de type $(n-q,n)$ dans $\mathcal{V}$,

$$\int_{V\cap\{|g|>\varepsilon\}}\psi\wedge\phi=\int_{\widetilde{V}\cap\{|\pi^*g|>\varepsilon\}}\pi^*\psi\wedge\pi^*\phi\,.$$

Quitte à restreindre ces voisinages pour qu'ils soient inclus dans des ouverts de cartes de $\widetilde{V}$, nous pouvons alors par partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement (fini car $\pi^*\psi$ est à support compact de par la propreté de $\pi$) supposer travailler dans un ouvert $U$ de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, dans lequel $\pi^*g$ s'écrit $G=z_1^{a_1}..z_n^{a_n}$ où $a=(a_1,..,a_n)\in\mathbb{N}^n$ et où $\pi^*\phi$ s'écrit comme le quotient d'une $(q,0)$-forme et d'une fonction $f$ holomorphes dans $U$ où $\{f=0\}\subset\{G=0\}$. Par le nullstellensatz, il existe un entier $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $G^N=uf$ avec $u$ holomorphe dans $U$. Ainsi nous nous sommes ramenés à montrer, pour prouver la première assertion du *v)* (à savoir l'existence de la limite valeur principale et le fait que nous définissions ainsi un courant), que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{C}^n\cap\{|g|>\varepsilon\}}\frac{\phi}{g^N}$$

existe lorsque $\phi$ est une $(n,n)$-forme-test dans $U$ et $g=z_1^{a_1}..z_n^{a_n}$ dans $U$.

En notant $\rho(\epsilon)$ l'intégrale en question, nous remarquons que

$$|\rho(\epsilon)|\leq\frac{C}{\epsilon^N}$$

et ainsi que $\epsilon\to\epsilon^\lambda\rho(\epsilon)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour $\mathrm{Re}(\lambda)$ assez grand (strictement supérieur à $N-1$).

L'ensemble $]0,+\infty[\setminus\{$valeurs critiques de $|g|\}$ ($|g|$ est différentiable sur $\{g\neq 0\}$) est un ouvert de $]0,+\infty[$, soit une réunion dénombrable d'intervalles ouverts consécutifs

$$I_k=]\epsilon_k,\epsilon_k'[\,,\quad k=0,1,2,...$$

Fixons $l$ entier (tel que $2/l<\epsilon_k'-\epsilon_k$) et notons

$$I_{k,l}:=[\epsilon_k+1/l,\epsilon_k'-1/l]\;,\;\;J_{k,l}:=]\epsilon_k'-1/l,\epsilon_{k+1}+1/l[\,.$$

Nous pouvons alors définir une partition de l'unité sur $]0,+\infty[$

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}(\rho_{k,l}+\mu_{k,l})\,,$$

où $\rho_{k,l}$ est une fonction plateau, de support dans $I_k$, identiquement égale à 1 sur $I_{k,l}$, prenant ses valeurs dans $[0,1]$, et $\mu_{k,l}$ :$]0,+\infty[\to[0,1]$ est une fonction-plateau de support inclus cette fois dans $J_{k,l}$. Notons que lorsque $l$ tend vers l'infini, alors, pour $k$ fixé, $I_{k,l}\to I_k$ et $\rho_{k,l}$ tend vers la fonction caractéristique de $I_k$.

Nous allons montrer que, pour $\operatorname{Re}\lambda$ assez grand, nous avons l'avatar du théorème de de Fubini suivant :

$$\lambda\int_0^\infty \epsilon^{\lambda-1}\rho(\epsilon)d\epsilon=\int_{\mathbb{C}^n}|g|^\lambda\frac{\phi}{g^N}\,. \tag{$*$}$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons, pour $\operatorname{Re}\lambda$ assez grand :

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^\infty \epsilon^{\lambda-1}\rho(\epsilon)d\epsilon &= \lambda\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=1}^\infty\left(\int_0^\infty\epsilon^{\lambda-1}\int_{\epsilon_k'>|g|^2>\epsilon_k}\frac{\phi\rho_{i,p}(|g|^2)}{g^N}d\epsilon\right)\\ &\quad+\lambda\lim_{k\to+\infty}\left(\int_{\bigcup\limits_k J_{k,l}}\epsilon^{\lambda-1}\int_{|g|^2>\epsilon}\frac{\phi\sum_{i=1}^{n_p}\mu_{i,p}(|g|^2)}{g^N}d\epsilon\right).\end{aligned}$$

Or, par le théorème de Sard,

$$\lim_{l\to\infty}\Big[\bigcup_k J_{k,l}\Big]=\{\text{valeurs critiques de }|g|\}$$

est un ensemble limite de mesure nulle et l'intégrale de droite au second membre de la dernière formule tend donc vers 0 quand $l$ tend vers l'infini.

Nous nous trouvons donc ramenés, pour vérifier (*), au cas où $g$ peut se "redresser" en $z_1$ au voisinage de chaque point du support de $\rho_{k,l}$ (car $d|g|\neq 0\Rightarrow dg\neq 0$) et grâce à une partition de l'unité de ce support subordonnée à ces voisinages, nous nous ramenons finalement au cas où $g=z_1$ et où les $n-1$ autres variables ne jouent plus alors aucun rôle, si ce n'est celui de paramètres ; il nous suffit alors pour conclure à la validité de (*) de faire le calcul suivant pour une $(1,1)$-forme-test $\phi$ dans $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^\infty\epsilon^{\lambda-1}\left(\int_{\{|z_1|>\epsilon\}}\frac{\phi(z_1)}{z_1^N}\right)d\epsilon &= \int_0^\infty\epsilon^\lambda\left(\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon^N e^{iN\theta}}d\theta\right)\epsilon d\epsilon\\ &= \int_{\mathbb{C}}|z_1|^\lambda\frac{\phi(z_1)}{z_1^N}\,,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient d'un passage en polaire et d'une intégration par parties. Ainsi

$$\lambda \int_0^\infty \epsilon^{\lambda-1} \left( \int_{\epsilon'_k > |g|^2 > \epsilon_k} \frac{\phi \rho_{k,l}(|g|^2)}{g^N} d\epsilon \right) = \int_{\mathbb{C}^n} |g|^\lambda \frac{\phi \rho_{k,l}}{g^N}$$

et nous retrouvons ce que nous voulions en sommant sur les $k$ puis par passage à la limite sur $l$.

Considérons la fonction

$$\lambda \to r(\lambda) = \int_{\mathbb{C}^n} |g|^\lambda \frac{\phi}{g^N}\,.$$

Cette fonction est holomorphe pour $\mathrm{Re}\,(\lambda)$ assez grande. N'oublions pas qu'ici, $g(z) = z_1^{a_1}..z_n^{a_n}$. Ainsi, après $k_j$ intégrations par parties successives selon les $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, $j = 1, ..., n$, nous obtenons :

$$r(\lambda) = \nu_{k_1,...,k_n}(\lambda) \int \frac{|z_1|^{\lambda a_1}..|z_n|^{\lambda a_n} \bar{z_1}^{k_1}..\bar{z_n}^{k_n}}{z_1^{Na_1}..z_n^{Na_n}} \left( \frac{\partial^{k_1}}{\partial \overline{z_1}^{k_1}} \circ ... \circ \frac{\partial^{k_n}}{\partial \overline{z_n}^{k_n}} \right) [\phi]$$

où $\nu_{k_1,...,k_n}$ est une fraction rationelle en $\lambda$ avec ses pôles rationnels strictement négatifs. De plus, en itérant suffisamment cette démarche, les $k_j$ sont grands et l'expression sous l'intégrale est bornée sur le support de $\phi$ pour $\lambda$ au voisinage de 0. Ainsi r est holomorphe au voisinage du demi-plan $\mathrm{Re}\,(\lambda) > -\eta$ pour un $\eta > 0$. Pour montrer la rapide décroissance de $r$ sur les bandes verticales $-\eta < \mathrm{Re}(\lambda) < \gamma$, nous faisons agir les opérateurs $\partial/\partial z_i$ pour ramener (encore par intégrations par parties) l'étude de $r$ sur des bandes suffisamment décalées à droite pour avoir $\mathrm{Re}\,(\frac{\lambda}{2} a_j - N) > 0$ pour tout $j$. Nous faisons alors agir les opérateurs $\bar{z_j}\partial/\partial \bar{z_i}$ et par l'identité d'Euler à une variable nous voyons que

$$r(\lambda) = \frac{1}{a_1..a_n \lambda^n} \int \prod_{j=1}^n \frac{|z|^{a_j \lambda}}{z_j^{Na_j}} \Big( \overline{z}_1 \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \circ ... \circ \overline{z_n} \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \Big) (\phi)\,,$$

d'où nous déduisons la décroissance rapide de $r$ sur les bandes verticales $[-\eta, \gamma]$ (cette décroissance rapide est uniforme sur chaque bande). Remarquons ensuite que, si $\lambda = x + iy$ alors la fonction

$$\frac{r(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty \epsilon^{\lambda-1} \rho(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\epsilon x} e^{\epsilon i y} \rho(e^\epsilon) d\epsilon$$

est la transformée de Fourier en −y de $\epsilon \to e^{\epsilon x}\rho(e^{\epsilon})$ et nous en déduisons par la formule d'inversion de Fourier que

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2i\pi}\int_{x+i\mathbb{R}} r(u)\frac{\epsilon^{-u}}{u}du\,.$$

Or puisque $\lambda = 0$ est le seul pôle à l'intérieur du rectangle $R_\Omega = [-\eta, \gamma] \times [-\Omega, \Omega]$ de la forme méromorphe sous l'intégrale, nous avons par la formule des résidus et le lemme de Jordan :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R_\Omega} r(u)\frac{\epsilon^{-u}}{u}du = r(0)\,.$$

Ainsi nous avons grâce à la rapide décroissance de $r$, quand $\Omega$ tend vers l'infini :

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma+i\mathbb{R}} r(u)\frac{\epsilon^{-u}}{u}du = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\eta+i\mathbb{R}} r(u)\frac{\epsilon^{-u}}{u}du + r(0).$$

Or l'intégrale de droite tend vers 0 quand $\epsilon$ tend vers 0, ce qui montre finalement que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{V\cap\{|g|>\varepsilon\}} \psi\wedge\phi = \left[\int |g|^\lambda \frac{\psi\wedge\phi}{g^N}\right]_{\lambda=0}$$

existe pour toute forme-test $\psi$. Que ceci définisse l'action sur la forme-test d'un courant positif à support dans V se voit au vu des expressions ou peut se déduire du théorème de Banach-Steinhaus dans le cadre de la théorie des distributions ([16], théorème XIII, p. 74).

Pour prouver la seconde assertion figurant dans *v)*, i.e l'indépendance du courant valeur principale $[V]\wedge\psi$ vis-a-vis du choix de $g$, nous pouvons comme précédemment nous ramener dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ dans lequel $W = \{f = 0\} \subset \{g = 0\}$, $g$ s'écrivant $g = z_1^{a_1}..z_n^{a_n}$, $(a_1, .., a_n) \in \mathbb{N}^n$. Or, par le nullstellensatz il existe $N \in \mathbb{N}$ et $h$ holomorphe dans U tels que $g^N = fh$ impliquant que $f$ et $h$ sont aussi des monômes s'écrivant

$$f = z_1^{\alpha_1}..z_n^{\alpha_n}\ ,\ h = z_1^{\beta_1}..z_n^{\beta_n}\ ,\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}\ ,\ \forall i = 1, .., n\,.$$

Il nous suffit alors de montrer l'égalité

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |g|^\lambda \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f|^\lambda \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0}$$

où $\phi$ est une forme-test régulière de support inclus dans $U$. Or,

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |g|^{\lambda} \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |g|^{N\lambda} \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f|^{\lambda} |h|^{\lambda} \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0},$$

ce qui nous ramène à montrer

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |f|^{\lambda}(1-|h|^{\lambda}) \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0} = 0.$$

Considérons alors la fonction de deux variables

$$F : (\lambda_1, \lambda_2) \to \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f|^{\lambda_1}(1-|h|^{\lambda_2}) \frac{\phi}{f}\right)_{\lambda=0} = 0$$

définie et holomorphe pour $\mathrm{Re}\,(\lambda_1)$ et $\mathrm{Re}\,(\lambda_2)$ assez grands. Comme $f$ et $h$ s'écrivent simultanément comme des monômes, nous pouvons comme précédemment, après suffisamment d'intégrations par parties selon les $\partial/\partial \bar{z}_i$, constater que $F$ se prolonge en une fonction holomorphe dans

$$\{\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 + 1 > 0, ..., \alpha_n\lambda_1 + \beta_n\lambda_2 + 1 > 0\},$$

ensemble inclus dans un produit de demi-plans

$$\{\mathrm{Re}\,(\lambda_1) > -\epsilon_1 \ : \ \mathrm{Re}\,(\lambda_2) > -\epsilon_2\}$$

où $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$. Ainsi la valeur de $F$ en $(0,0)$ peut s'approcher le long des "axes" de coordonnées $\{\lambda_1 = 0\}$ et $\{\lambda_2 = 0\}$, ce qui fait que nous avons :

$$F(0,0) = \lim_{\lambda_1 \to 0} F(\lambda_1, 0) = 0$$

puisque $F(\lambda_1, 0) \equiv 0$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda_1$ assez grand (nous utilisons pour conclure le principe du prolongement analytique). C'est ce qu'il fallait montrer.

*iv)* $\Longrightarrow$ *iii)*

Soit $\pi\ : \widetilde{V} \to V$ une résolution des singularités au dessus d'un voisinage $\mathcal{U}$, trace sur $V$ d'un voisinage $\mathcal{V}$ de $z_0 \in W$ dans $D$ ; nous supposerons ici encore $z_0 = 0$. Nous nous donnons une $(q,0)$-forme holomorphe $\psi$ dans $V \setminus W$ telle que le courant d'intégration $[V] \wedge \psi$ se prolonge depuis $D \setminus W$ à un voisinage de $V$ dans $D$. Nous devons montrer qu'alors $\pi^*\psi$ est méromorphe sur $\widetilde{V}$. Nous pouvons nous restreindre à un ouvert relativement compact sur lequel l'ordre du courant $T$ prolongeant $[V]\wedge\psi$ au voisinage de $\mathcal{V}$ sera fini, disons borné par $N$. Ainsi $\langle T,\psi\rangle$ (pour une forme-test de type $(n-q,n)$ dans $\mathcal{V}$) ne met en jeu que les dérivées d'ordre supérieur à $N$ des coefficients de la forme test $\psi$. Comme nous l'autorisent les développements de la section 2 (en particulier ce qui suit la remarque 4), nous supposerons que $(z_1,..,z_n)$ sont utilisées comme coordonnées locales sur $V\setminus W$ (par la projection de $D$ sur les $n$ premières coordonnées). Observons d'abord que le pull-back $\pi^*\psi$ est holomorphe sur $\widetilde{V}\setminus\widetilde{W}$, où $\widetilde{W}:=\pi^{-1}(W)$. Comme nous l'avons déjà souligné auparavant, pour montrer la méromorphie de $\pi^*\psi$ sur $\widetilde{V}$, il suffit de le faire au voisinage des points de $\widetilde{W_{reg}}:=[\pi^{-1}(W)]_{\rm reg}$, ce grâce au théorème d'Hartogs (puisque la codimension dans $\widetilde{V}$ de $\widetilde{W}_{\rm reg}$ est supérieure ou égale à 2).

Fixons donc $\widetilde{z_0}\in\widetilde{W}_{\rm reg}$ et choisissons des coordonnées locales $(\widetilde{z_1},..,\widetilde{z_n})=(\widetilde{z}',\widetilde{z_n})$ centrées en $\widetilde{z_0}$ telles que $\widetilde{W}_{\rm reg}$ soit donné par $\widetilde{z_n}=0$. Supposons également, sans perte de généralité, que la forme $\pi^*\psi$ s'écrive localement avec un seul terme $h(\widetilde{z})d\widetilde{z_1}\wedge...\wedge d\widetilde{z_q}$, où $h$ est holomorphe en dehors de $\widetilde{z_n}=0$. Supposons aussi que le développement en série de Laurent

$$h(\widetilde{z}',\widetilde{z_n})=\sum a_k(\widetilde{z}')\widetilde{z_n}^k$$

ait une infinité de coefficients $a_k(\widetilde{z}')$, avec $k$ négatif, non identiquement nuls. Nous pouvons donc choisir un entier $l$ aussi grand que nous voulons et une fonction test $\eta_l$ tels que :

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}}a_{-l}(\widetilde{z}')\eta_l(\widetilde{z}')d\widetilde{z}'\wedge d\bar{\widetilde{z}}'=1.$$

Choisissons également une fonction $g$ régulière d'une variable, à support dans $]0,1[$, telle que

$$\int_0^1 xg(x)dx=1\,.$$

Nous définissons alors, pour tout $d>0$, la $(n-q,n)$-forme-test

$$\widetilde{\phi_{l,d}}(\widetilde{z}):=\eta_l(\widetilde{z}')\,d^{-2}g(|\widetilde{z_n}|/d)\,\widetilde{z_n}^{\,l}\,d\widetilde{z_{q+1}}\wedge...\wedge d\widetilde{z_n}\wedge d\overline{\widetilde{z_1}}\wedge...\wedge d\overline{\widetilde{z_n}}.$$

Son support étant inclus dans $\mathrm{supp}\,(\eta_l)\times]0,1[$, il ne rencontre pas $\widetilde{W}$, ce qui nous permet de définir une forme test sur $V\setminus W$ en posant

$$\phi_{l,d}:=(\pi^{-1}_{|\widetilde{V}\setminus\widetilde{W}})^*(\widetilde{\phi_{l,d}})\,.$$

Il suffit de poser $\phi(z_1,...,z_n,z_{n+1},...,z_{n+p}) := \phi_{l,d}(z_1,...z_n)$ pour obtenir une forme test (notée encore $\phi_{l,d}$) définie dans un voisinage de $V \setminus W$ sur laquelle le courant $T$ peut agir. Nous obtenons alors (nous ne détaillons pas les calculs qui utilisent seulement les relations d'orthogonalités) :

$$\begin{aligned}\langle T, \phi_{l,d}\rangle &= \int_{V\setminus W} \psi \wedge \phi_{l,d} = \int_{\widetilde{V}\setminus\widetilde{W}} \pi^*(\psi) \wedge \pi^*(\phi_{l,d}) \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{C}^{n-1}} a_{-l}(\widetilde{z}')\eta_l(\widetilde{z}')d\widetilde{z}' \wedge d\overline{\widetilde{z}'} = 2\pi\,,\end{aligned}$$

et ce indépendament de $l$ et de $d$. D'un autre côté, nous pouvons majorer toute dérivée de $\widetilde{\phi}_{l,d}$ par rapport à $\widetilde{z}$ par une constante fois $d^{l-|\alpha|-2}$, où $\alpha$ est l'ordre de dérivation (la constante dépend de l'ordre de dérivation). En posant $z_j(z) = z_j \circ \pi(\widetilde{z})$, nous en déduisons que les dérivées jusqu'à l'ordre $N$ des coefficients de $\phi_{l,d}$ sont majorées par une constante fois $d^{l-M}$, où $M = M(N)$ est un entier dépendant seulement de $N$ et de l'ordre d'annulation du jacobien de $\pi$ le long de $\widetilde{W}$. En prenant $l$ strictement supérieur au $M$, il suit que toutes les dérivées d'ordre plus petit que $N$ de $\phi_{l,d}$ tendent vers zéro quand $d$ tend vers zéro, impliquant par hypothèse $\langle T, \phi_{l,d}\rangle \to 0$, ce qui contredit $\langle T, \phi_{l,d}\rangle = 2\pi$.Nous déduisons donc de cela la méromorphie de $h$ au voisinage de 0, et, en raisonnant ainsi partout localement sur $\widetilde{V}$, celle de $\pi^*\psi$, ce qui prouve bien que la clause *iii)* est remplie pour $\psi$.

Comme *v)* implique évidemment *iv)*, la preuve du théorème 4 se trouve ainsi achevée. $\diamondsuit$

**Définition 5** *Les $(q,0)$-formes satisfaisant les conditions équivalentes du théorème 4 sont appelées $q$-formes méromorphes sur $V$. L'ensemble de ces formes sera noté $\mathcal{M}^q(V)$.*

Comme le montre ce théorème, nous avons introduit un concept de méromorphie trés robuste puisque les définitions raisonnables de différents points de vue convergent vers ce même concept. Notons de plus qu'à chaque forme $\psi \in \mathcal{M}^q(V)$, nous pouvons associer, selon *v)*, un courant canonique valeur principale que nous noterons $\psi \wedge [V]$ dans la suite.

# 4 Formes holomorphes sur un ensemble analytique

Soit $V$ un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure $n$ d'un ouvert $D$ de la variété ambiante $\mathbb{C}^{n+p}$, $W$ un sous-ensemble analytique de $V$ contenant $V_{\text{sing}}$.

Nous voulons maintenant déterminer quelles formes méromorphes sur $V$ (au sens de l'une des clauses énoncées au théorème 4) peuvent être considérées comme *holomorphes* sur $V$. Nous avons cinq points de vue en analogie avec le théorème 4, mais nous allons nous rendre compte qu'ils ne convergent malheureusement pas tous vers une même définition d'holomorphie.

**Théorème 5** *Soit $\psi \in \mathcal{M}^q(V)$ et soient les conditions suivantes :*

*i) la forme $\psi$ est la restriction à $V \setminus W$ d'une forme holomorphe $\Psi$ définie dans un voisinage de $V$ (dans $D$) ;*

*ii) pour tout sous-ensemble analytique $V'$ de dimension $q$ non contenu dans $W$, la forme $\psi \wedge \bar{\psi}$ est localement intégrable le long de $V'$, c'est-à-dire telle que pour tout compact de $V'$, l'intégrale*

$$\int_{V'} \psi \wedge \overline{\psi}$$

*est convergente au sens de Lebesgue (si $q = 0$, cette clause est à remplacer par le fait que la fonction $|\psi|^2$ soit localement bornée sur $V$) ;*

*iii) pour toute résolution de singularités $\pi : \widetilde{V} \to V$, le pull-back $\pi^*(\psi)$ admet un prolongement holomorphe à $\widetilde{V}$ ;*

*iv) le courant d'intégration*

$$\phi \to \int_{V \setminus W} \psi \wedge \phi$$

*est la restriction à $D \setminus W$ d'un courant $T$ défini dans un voisinage de $V$ (dans $D$) et $\overline{\partial}$-fermé dans ce voisinage ;*

*v) le courant valeur principale $\psi \wedge [V]$ (introduit comme dans la clause v) du théorème 4) existe (comme courant dans $D$) et est $\bar{\partial}$-fermé.*

*Alors nous avons entre ces diverses conditions les implications suivantes :*

$$i) \Rightarrow ii) \Leftrightarrow iii) \Rightarrow iv) \Leftrightarrow v)\,.$$

**Preuve.**

<u>*ii)* $\Rightarrow$ *iii)*</u>

Notons $\widetilde{W} := \pi^{-1}(W)$ et supposons d'abord $q > 0$.

Soit $\widetilde{z}_0$ un point de $\widetilde{V}$ et $\mathcal{U}$ un voisinage de $\widetilde{z}_0$ (dans $\widetilde{V}$) relativement compact. Soit $\widetilde{V}'$ une $q$-sous-variété de $\widetilde{V}$ passant par $\widetilde{z}_0$. Nous savons par hypothèses que $\pi^*\psi$ est holomorphe sur $\widetilde{V} \setminus \widetilde{W}$ et que quitte à restreindre $\mathcal{U}$ :

$$\left| \int_{\widetilde{V}' \cap (\mathcal{U} \setminus \widetilde{W})} \pi^*\psi \wedge \overline{\pi^*\psi} \right| \leq \left| \int_{\pi(\widetilde{V}' \cap \mathcal{U}) \setminus W} \psi \wedge \bar{\psi} \right| = \left| \int_{\pi(\widetilde{V}' \cap U)} \psi \wedge \bar{\psi} \right| < \infty$$

par hypothèse et parce que nous pouvons enlever l'ensemble négligeable $W$ sans changer la valeur de l'intégrale. Ainsi, la forme $\pi^*\psi$ (positive à un facteur multiplicatif près) est localement intégrable le long de tout $q$-ensemble analytique passant par $\widetilde{z}_0$. Or, nous avons montré dans la section 3 qu'une forme vérifiant *ii)* dans le cas $V$ lisse est méromorphe en montrant que les coefficients de son développement en série de Laurent (selon $z_n$ dans un ouvert adéquat de $\mathbb{C}^n$) vérifiant l'inégalité suivante

$$\frac{|a_{L,k}(z', \cdot)|^2}{2(k+1)} \times \frac{1}{r^{2(k+1)}} \leq r^{a_{L,z'}+1}$$

étaient nuls en deça d'un certain rang $k_0 \leq 0$. Dans notre situation, nous avons par hypothèse $a_{L,z'} = 0$ impliquant cette fois que tous les coefficients d'ordre strictement négatif sont nuls et notre forme est donc localement bornée au voisinage de $\widetilde{z}_0$ (sur la variété lisse $\widetilde{V}$). Ceci implique, puisque la forme est méromorphe, qu'elle est en fait localement bornée au voisinage de $\widetilde{z}_0$ (sur la variété lisse $\widetilde{V}$).

Si $q = 0$,nous montrons de même que le fait que $\psi$ soit localement bornée sur $V$ implique que $\pi^*\psi$ est localement bornée au voisinage de $\widetilde{z}_0$.

Dans les deux cas, la forme $\pi^*\psi$ se prolonge donc (coefficient par coefficient via le théorème de Riemann) en une forme holomorphe au voisinage de $\widetilde{z}_0$, ce qu'il fallait montrer.

<u>*iii)* $\Rightarrow$ *ii)*</u>

Pour l'assertion réciproque, choisissons un point $z_0$ de $W$, un $q$-sous-ensemble analytique $V'$ de $V$ passant par $z_0$ et $U$ un voisinage relativement compact (dans $D$) de $z_0$. Nous avons alors, quitte à restreindre $U$ :

$$\begin{aligned}\left|\int_{(V'\cap U)\setminus W}\psi\wedge\overline{\psi}\right| &= \left|\int_{\pi^{-1}((V'\cap U)\setminus W)}\pi^*\psi\wedge\overline{\pi^*\psi}\right|\\ &\leq \left|\int_{\pi^{-1}(V'\cap U)\setminus\pi^{-1}(W)}\pi^*\psi\wedge\overline{\pi^*\psi}\right|\\ &\leq \left|\int_{\pi^{-1}(V'\cap U)}\pi^*\psi\wedge\pi^{\bar{*}}\psi\right|<\infty\end{aligned}$$

car $\pi^*\psi$ est holomorphe sur $\widetilde{V}$, donc localement bornée. Ainsi

$$\left|\int_{V'\cap U\setminus W}\psi\wedge\overline{\psi}\right| = \left|\int_{V'\cap U}\psi\wedge\overline{\psi}\right|<\infty,$$

ce qui prouve *ii)*.

<u>*i)* $\Rightarrow$ *ii)*</u>

Cette implication est immédiate puisque la forme $\psi$ est alors bornée au voisinage de $V$, donc de $W$.

<u>*iii)* $\Rightarrow$ *v)*</u>

Pour montrer *iii)* $\Rightarrow$ *v)*, choisissons $\pi:\widetilde{V}\to V$ une désingularisation, $\phi$ une $(n-q,n-1)$-forme-test et observons que le courant $\psi\wedge[V]$ est bien défini (nous pouvons intégrer sur $\widetilde{V}$ la forme $\pi^*[\psi\wedge\phi]$ régulière au voisinage de $V$ et à support compact) et que nous avons

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(\psi\wedge[V])(\phi) &= \pm\lim_{\epsilon\to 0}\int_{V\cap\{|g|>\epsilon\}}\psi\wedge\overline{\partial}\phi\\ &= \pm\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\widetilde{V}\cap\{|\pi^*(g)|>\epsilon\}}\pi^*\psi\wedge\overline{\partial}[\pi^*\phi]\\ &= \pm\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\widetilde{V}\cap\{|\pi^*(g)|>\epsilon\}}\overline{\partial}(\pi^*\psi\wedge\pi^*\phi)\\ &\quad\ \pm\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\widetilde{V}\cap\{|\pi^*(g)|>\epsilon\}}\bar{\partial}(\pi^*\psi)\wedge\pi^*\phi\\ &= \pm\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{|\pi^*(g)|=\epsilon\}}\pi^*\psi\wedge\pi^*\phi=0\ ;\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité provient du théorème de Stokes ; nous utilisons ensuite l'holomorphie de $\pi^*\psi$ sur la variété $\widetilde{V}$ et le fait que la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{|\pi^* g| = \epsilon\} \cap \mathrm{Supp}\,(\pi^*\phi)$ tend vers 0 lorsque $\epsilon$ tend vers 0. Pour montrer ce dernier point, nous pouvons par exemple appliquer le théorème d'Hironaka à chaque ouvert d'un recouvrement fini adéquat du compact $\mathrm{Supp}\,(\pi^*\phi)$ et nous ramener à la situation à croisements normaux. Puis à nouveau par partition de l'unité (la propreté de chaque "résolution d'Hironaka" joue un rôle ici) à une somme finie de termes du type

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{|z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}| = \epsilon\}} \omega$$

où $(a_1, .., a_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\omega$ est une forme régulière au voisinage de 0 (dans $\mathbb{C}^n$). Cette limite tend bien vers 0, la mesure de Lebesgue $(2n-1)$-dimensionnelle de $\{|z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}| = \epsilon\}$ tendant clairement vers 0 avec $\epsilon$.

**Remarque 8.** Nous n'étions pas obligés ici d'utiliser le théorème d'Hironaka ; nous aurions pu nous ramener en ré-utilisant le théorème de Stokes à intégrer sur $\widetilde{V} \cap \{|g| < \epsilon\}$ et majorer la nouvelle intégrale en s'appuyant sur l'inégalité de Lojasiewicz.

*v) ⇒ iv)*

Cette implication est triviale.

*iv) ⇒ v)*

Nous ne montrerons cette implication seulement dans le cas où $V$ est une courbe de $\mathbb{C}^2$ donnée par

$$V = \{f(z, w) = 0\}.$$

Nous supposerons d'abord que $\psi$ est une 1-forme. Soit donc $\psi \in \mathcal{M}^1(V)$ vérifiant *iv)*. Nous pouvons nous restreindre à une étude locale au voisinage d'un point singulier (isolé ici, ce qui simplifie la démonstration) que nous supposerons être $(0, 0)$. Notre forme $\psi$ est alors la restriction à $V$ d'une forme $\Psi$ méromorphe au voisinage de $V$ dont la trace sur $V$ du lieu polaire est inclue dans $\{(0, 0)\}$ (théorème 4,*i)*). Nous pouvons alors choisir un système de coordonnées $(z, w)$ convenable pour avoir (grâce au nullstellensatz) :

– la forme $\Psi$ s'écrit :

$$\Psi = \frac{\Psi_1(z, w)dz + \Psi_2(z, w)dw}{w^k}$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ (notons que si $k = 0$, il n'y a plus rien à faire), $\Psi_1$, $\Psi_2$ holomorphes au voisinage de $(0,0)$ ;
- $\{(0,0)\} = \{w = 0\} \cap V$.

Sur $V \setminus \{w = 0\}$, nous avons $(z,w) = (z(w), w)$ par le théorème des fonctions implicites ; si $\phi$ est une fonction-test nous avons :

$$\phi_{|V\setminus\{w=0\}}(z,w) = \phi(z(w), w) =: h(w)$$

et

$$\Psi_{|V\setminus\{w=0\}} =: \frac{g(w)dw}{w^k}$$

avec $g(0) \neq 0$. Nous avons ainsi, par le théorème des résidus :

$$\bar{\partial}(\psi \wedge [V])(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{|w|=\epsilon\}} \frac{h(w)g(w)}{w^k} dw = 2i\pi \frac{(gh)^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \qquad (\dagger)\,,$$

où $(gh)^{(k-1)}$ désigne la dérivée $(k-1)$-ème de $gh$. D'un autre côté, si nous posons

$$T' = T - \psi \wedge [V]\,,$$

où $T$ est le courant $\bar{\partial}$-fermé prolongeant $\psi$ fois le courant d'intégration, nous avons alors, pour toute fonction-test,

$$\bar{\partial}(\psi \wedge [V])(\phi) = \bar{\partial} T'(\phi) = -T'(\bar{\partial}\phi) \qquad (\dagger\dagger)\,.$$

Nous pouvons alors toujours choisir une fonction test $\phi$ holomorphe au voisinage de $(0,0)$ telle que $(hg)^{(k-1)}(0,0) \neq 0$ et par $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$, nous aboutissons à une contradiction, ce qui implique que tous les coefficients (distributions) du courant $\bar{\partial}(\psi \wedge [V])$ sont nuls, ce que nous voulions.

Si $\phi \in \mathcal{M}^0(V)$, nous raisonnons de la même manière en choisissant convenablement notre $(1,0)$-forme-test $\phi$ telle que sa restriction à $V$ s'écrive $h(w)dw$ où $h$ est holomorphe dans un voisinage de 0 et $(h\phi_{|V\setminus\{(0,0)\}})^{(k-1)}(0) \neq 0$.

Dans le cas où $n > 1$, nous pouvons seulement avoir une approche "naïve" d'une démonstration de l'implication.

Pour ce faire, nous pouvons supposer que $\psi$ est la restriction à $V$ de la forme méromorphe $\Psi/g$ ($\Psi$ holomorphe au voisinage de $V$). En effet il aurait fallu (par le nullstellensatz) un exposant $N$ à $g$, mais nous avons montré (théorème 4, *v)*) que la limite ne dépend pas de $g$ donc de $N$ ici ; nous pouvons donc supposer $N = 1$. Soit une forme test $\phi$ et une fonction $h$ antiholomorphe au voisinage de $V$ et s'annulant sur $\{g = 0\}$. En nous ramenant une fois de plus à la situation à croisements normaux par le théorème d'Hironaka, nous pouvons nous restreindre à travailler dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ dans lequel $g$ s'écrive

$$g = z_1^{a_1}...z_n^{a_n}$$

et, puisque $g$ divise une puissance de $h$, $h$ s'écrive aussi

$$h = z_1^{b_1}...z_n^{b_n}$$

avec $a_i > 0 \Longrightarrow b_i > 0$. En nous référant à la démonstration du *i) $\Rightarrow$ v)* du théorème 4 et en gardant les mêmes notations, nous avons

$$\bar{\partial}(\psi \wedge [V])(\phi) = \left[\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{C}^n} |g|^\lambda \psi \frac{\overline{dg} \wedge \phi}{\bar{g}}\right]_{\lambda=0},$$

soit, dans notre cas :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{V \cap \{|g|=\epsilon\}} \frac{\Psi}{g} \wedge \bar{h}\phi$$
$$= \pm\left[\lambda \int_{\mathbb{C}^n} \frac{|g|^{2\lambda}}{g} \Psi \wedge \bar{h}\phi \wedge \frac{d\bar{g}}{\bar{g}}\right]_{\lambda=0}$$

Or, $d\bar{g}/\bar{g}$ est la dérivée logarithmique de $\bar{g}$ et vaut

$$\frac{d\bar{g}}{\bar{g}} = \sum_{i, a_i > 0} a_i \frac{d\overline{z_i}}{\overline{z_i}}$$

Puisque $a_i > 0 \Rightarrow b_i > 0$, la forme différentielle

$$\frac{d\bar{g}}{\bar{g}}\bar{h}$$

n'a pas de pôles sur $V$, et ainsi la valeur en $\lambda = 0$ de

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{|g|^{2\lambda}}{g} \psi \wedge \bar{h} \frac{d\bar{g}}{\bar{g}} \phi$$

existe (théorème 4, *i) $\Rightarrow$ v)*) ; si nous multiplions cette fonction de $\lambda$ par $\lambda$, sa valeur en 0 sera forcément 0, ce que nous affirmions.

Ainsi, nous aurions envie de dire que le $\bar{\partial}$ du courant valeur principale ne dépend heuristiquement que de la "partie holomorphe de notre forme-test restreinte à $V$"(si tant est que la définition de cette "partie holomorphe" puisse avoir un sens) ; or par hypothèse, si $\phi$ est holomorphe au voisinage de $V$, nous avons

$$\bar{\partial}(\psi \wedge [V])(\phi) = \bar{\partial}T'(\phi) = -T'(\bar{\partial}\phi) = 0\,,$$

ce qui montrerait bien que le courant valeur principale $[V] \wedge \psi$ est $\bar{\partial}$-fermé dès qu'un tel $T$ existe. Malheureusement, la notion de "partie holomorphe ou anti-holomorphe" paraît difficile (sinon impossible) à définir lorsque le lieu singulier de $V$ n'est plus discret. Cependant, le résultat est bien vrai en général : il résulte du résultat d'unicité prouvé par exemple dans ([4], théorème 4.1) que

$$\bar{\partial}([V] \wedge \psi)$$

ne peut s'écrire comme le $\bar{\partial}$ d'un courant supporté par $V \cap \{g = 0\}$ que si c'est le courant nul ; cette propriété repose sur les fondements de la théorie des courants résiduels de Coleff-Herrera et sur le théorème du "résidu fibré" [3]. Nous l'admettrons ici ; la preuve de notre implication en résulte. $\diamondsuit$

**Définition 6** *La famille des q-formes sur $V$ qui sont restrictions des formes holomorphes dans l'espace ambiant(c'est à dire vérifient i)) sera notée $\Omega_V^q$. Les q-formes ayant la propriété ii) seront appelées formes $L^2$-holomorphes et la famille qu'elles constituent sera notée $\Omega_2^q(V)$. D'après l'équivalence entre ii) et iii), ces formes deviennent holomorphes au sens usuel si la variété est lisse. Les q-formes satisfaisant les conditions iv) et v) sont dites formes holomorphes sur $V$. Leur famille sera notée $\omega_V^q$.*

Nous nous trouvons donc en présence de trois classes d'holomorphie sur $V$ et l'exemple suivant montre que ces trois classes sont distinctes.

**Exemple.**

Soit $V$ la courbe singulière ("cusp") dans $\mathbb{P}^2$ donnée par $z_1^3 = z_2^2$. Alors

$$dz_1/z_2 \in \omega_V^1 \setminus \Omega_2^1(V), \quad dz_2/z_1 \in \Omega_2^1(V) \setminus \Omega_V^1,$$

$$z_1/z_2 \in \omega_V^0 \setminus \Omega_2^0(V), \quad \textit{et } z_2/z_1 \in \Omega_2^0(V) \setminus \Omega_V^0\ .$$

Soit $\phi$ une fonction-test. En utilisant la paramétrisation $t \to (t^2, t^3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\bar\partial\Big[\frac{dz_1}{z_2}\wedge[V])\Big](\phi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{V\cap\{|z_1|>\epsilon\}}\frac{\bar\partial\phi(z)\wedge dz_1}{z_2} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{V\cap\{|z_1|=\epsilon\}}\frac{\phi(z)dz_1}{z_2}\\ &= 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t|=\epsilon}\frac{\phi(t^2,t^3)\,dt}{t^2} = 4i\pi\frac{d}{dt}\Big[\phi(t^2,t^3)\Big]_{|t=0} = 0\end{aligned}$$

par le théorème des résidus, ce qui prouve $dz_1/z_2 \in \omega_V^1$. D'un autre côté, puisque $dz_1/z_2 = 2dt/t^2$ et que $1/t^2$ n'est pas $L^2$-holomorphe, la forme $dz_1/z_2$ n'appartient pas à $\Omega_2^1(V)$. De plus, la forme $dz_2/z_1 = 3dt$ est clairement $L^2$-holomorphe sur $V$ mais n'est pas holomorphe dans l'espace ambiant.

La fonction $z_1/z_2 = 1/t$ n'étant pas localement bornée sur $V$ n'appartient pas à $\Omega_2^1(V)$. Or, pour une forme-test $\phi(z) = \phi_1(z)dz_1 + \phi_2(z)dz_2$, nous obtenons

$$\bar\partial\Big(\frac{z_1}{z_2}[V]\Big)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t|=\epsilon}\Big(2\phi_1(t^2,t^3) + 3t\phi_2(t^2,t^3)\Big)dt = 0,$$

et la fonction $z_1/z_2$ est bien holomorphe sur $V$. Pour finir, la fonction $z_2/z_1 = t$ est localement bornée sur $V$ mais n'est pas prolongeable à une fonction holomorphe dans l'espace ambiant.

Nous avons montré ce que nous affirmions et l'inclusion $\Omega_V^q \subset \Omega_2^q(V) \subset \omega_V^q$ provenant du théorème 5 est donc stricte en général.

# 5 À propos de la trace et du théorème d'Abel

Nous demandons dans cette section que le domaine $D$ soit un ouvert $p$-concave de $\mathbb{P}^{n+p}(\mathbb{C})$, c'est à dire qu'en chaque point de $D$ passe un $p$-plan (intersection transverse de $n$ hyperplans projectifs) entièrement inclus dans $D$. Autrement dit, $D$ est une réunion de $p$-plans. Nous appellerons dual de $D$ (noté $D'$) l'ouvert de la grassmanienne $\mathbb{G}(p, n+p)$ dont les points sont les $p$-plans inclus dans $D$.

Etant donné un sous-ensemble analytique fermé $V$ de $D$ de dimension pure $n$ et de lieu singulier contenu dans un sous-ensemble analytique $W$ de $V$ de dimension $< n$, étant donnée $\psi$ une $(q,0)$-forme holomorphe sur la variété lisse $V \setminus W$, nous définissons dans cette section une nouvelle $(q,0)$-forme appellée trace de $\psi$ et notée $Tr\psi$ à priori définie dans un ouvert $D' \subset W'$ dense dans D'.

Nous pouvons montrer que l'ensemble des $p$-plans de $D'$ contenant (ou contenus dans) une des composantes irréductibles de V, union ceux qui coupent $W$, union ceux qui coupent $V$ de manière non transverse, est inclus dans une hypersurface $W'$ du domaine dual $D'$. Les $p$-plans pris hors de cette hypersurface $W'$ coupent donc $V$ (dans $D$) en un nombre fini de points réguliers (la finitude est une conséquence de la compacité du milieu projectif ambiant).

**Remarque 9.** Notons que si $V$ est un sous-ensemble algébrique

$$V = Z(P_1, .., P_n) = Z(I)\,,$$

où $I$ est un idéal homogène (non $(X_0, ..., X_n)$-primaire) de $\mathbb{C}[X_0, ..., X_{n+p}]$, le nombre de points d'intersection est égal au degré de $V$, degré pouvant être défini comme la somme des coefficients des termes de plus haut degré des polynômes de Hilbert-Samuel attachés aux idéaux premiers minimaux intervenant dans la décomposition primaire de l'idéal $I$.

Nous présentons ici une première approche naïve de la trace. Si $\zeta \in D' \setminus W'$, notons $z_i(\zeta), i = 1, ..., d$ les $d$ points d'intersection de $\zeta$ et de $V \setminus W$. Via leurs expressions dans les cartes, nous pouvons constater que les coordonnées de ces points dépendent holomorphiquement des coordonnées locales de $\zeta$ dans la grassmanienne. Nous définissons alors la trace de $\zeta$ par l'expression :

$$\mathrm{Tr}\,[\psi](\zeta) := \sum_{i=1}^{d} \psi(z_i(\zeta)).$$

Le problème de cette définition est qu'elle n'est pas intrinsèque dans le sens où elle dépend des coordonnées locales choisies. De plus le nombre de points d'intersection n'est pas le même pour tous les $p$-plans, nous savons seulement qu'il ne varie pas localement. Il ne paraît alors pas évident de montrer ainsi que cette définition est viable.

Nous avons heureusement une approche plus intrinsèque de la trace en utilisant la variété d'incidence $X$ dans l'espace produit $D \times D'$. Cette variété d'incidence est définie ainsi :

$$X = \{(z, \zeta) = (z, (u'_1, .., u'_n)) \in \ D \times D'\,;\, z \in u'_i \;\forall i = 1, ..., n\}$$

où les $u_i'$ sont les $n$ hyperplans définissant le $p$-plan $\zeta$. Ainsi $X$ est une sous variété lisse de $D \times D'$ de dimension

$$n + p + \dim \mathbb{G}(p, n+p) - n = n + p + n(p+1) - n = np + n + p\,.$$

Considérons $\pi_1$ et $\pi_2$ les projections respectives sur $D$ et $D'$. Soient $X_1 := \pi_1^{-1}(V \setminus W)$ et $X_2 := \pi_2^{-1}(D' \setminus W')$. L'ensemble $X_1 \cap X_2$ est alors une sous-variété lisse de l'ouvert $X_2$ de $X$ de dimension

$$np + n + p - p = n(p+1) = \dim \mathbb{G}(p, n+p)\,.$$

Nous définissons alors bien un $(q,0)$-courant $\bar{\partial}$-fermé sur $X_1 \cap X_2$ en posant $T := \pi_1^*(\psi) \wedge [X_1]$ tel que, si $\phi$ est une $(n(p+1)-q, n(p+1))$-forme-test dans $X_2$, nous ayions :

$$T(\phi) = \int_{X_1 \cap X_2} \pi_1^*(\psi) \wedge \phi.$$

L'application $\pi_2$ étant propre, nous pouvons transporter par push-forward le courant $T$ sur $D' \setminus W'$, définissant ainsi un nouveau $(q,0)$-courant $(\pi_2)_*(T)$ $\bar{\partial}$-fermé sur $D' \setminus W'$. Si $\phi$ est maintenant une $(n(p+1)-q, n(p+1))$-forme-test à support petit dans $D' \setminus W'$, nous observons que :

$$\begin{aligned}
(\pi_2)_* T(\phi) = T(\pi_2^*(\phi)) &= \int_{X_1 \cap X_2} \pi_1^*(\psi)(z,\zeta) \wedge \pi_2^*(\phi)(z,\zeta) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_{D' \setminus W'} \pi_1^*(\psi)(z_i(\zeta),\zeta) \wedge \pi_2^*(\phi)(z_i(\zeta),\zeta) \\
&= \int_{D' \setminus W'} \mathrm{Tr}\,[\psi](\zeta) \wedge \phi(\zeta)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons identifié (par dualité) la trace de $\psi$ et le courant $(\pi_2)_*(T)$, soit :

$$\mathrm{Tr}\,[\psi] = (\pi_2)_* \Big[\pi_1^*(\psi) \wedge [\pi_1^{-1}(V \setminus W)]\Big]\,.$$

Ceci donne une approche cette fois intrinsèque de la trace et va nous permettre de démontrer rapidement une généralisation du théorème d'Abel en utilisant les paragraphes précédents. Notons que le $(q,0)$-courant $(\pi_2)_*(T)$ étant $\bar{\partial}$-fermé sur $D' \setminus W'$, la $(q,0)$-forme $\mathrm{Tr}\,[\psi]$ est bien holomorphe sur l'ouvert $D' \setminus W'$ comme nous l'avancions auparavant.

**Théorème 6** *Soit $D$ un ouvert $p$-concave de $\mathbb{P}^{n+p}(\mathbb{C})$ d'ouvert dual $D'$ dans la grassmanienne $\mathbb{G}(p, n+p)$ ; soit $V$ un sous-ensemble analytique fermé de $D$ de dimension pure $n$. Soit $\psi$ une $(q,0)$-forme holomorphe sur la variété lisse $V \setminus W$, où $W$ est un sous-ensemble analytique de $V$ de dimension $< n$ contenant le lieu singulier de $V$. Alors nous avons les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} \psi \in \mathcal{M}^q(V) &\Rightarrow \mathrm{Tr}\,[\psi] \in \mathcal{M}^q(D') \\ \psi \in \omega_V^q &\Rightarrow \mathrm{Tr}\,[\psi] \in \Omega^q(D'). \end{aligned}$$

**Preuve.** Supposons d'abord que $\psi$ soit méromorphe sur $V$. Nous savons déjà que sa trace est holomorphe sur $D'$ privé d'une hypersurface analytique $W'$. La forme $\pi_1^*\psi$ est méromorphe sur l'ensemble analytique $\pi_1^{-1}(V)$ et par le théorème 4, nous en déduisons que le courant $\pi_1^*\psi \wedge [\pi_1^{-1}(V)]$ défini sur $\pi_2^{-1}(D' \setminus W')$ se prolonge en un courant défini sur la variété d'incidence $X$. Le push-forward de ce nouveau courant par $\pi_2$ prolonge alors à $D'$ le courant d'intégration $[D'] \wedge \mathrm{Tr}\,[\psi]$ défini sur $D' \setminus W'$. Ainsi, à nouveau par le théorème 4, nous avons $\mathrm{Tr}\,[\psi] \in \mathcal{M}^q(D')$ et la première implication est ainsi montrée.

Si $\psi$ est maintenant supposée être holomorphe sur $V$, son pull-back par $\pi_1$ l'est sur $\pi_1^{-1}(V)$ et le courant prolongeant $\pi_1^*\psi \wedge [\pi_1^{-1}(V)]$ à $X$ est $\bar{\partial}$-fermé par le théorème 5. Son push-forward par $\pi_2$ l'est donc également sur $D'$, ce qui prouve (à nouveau par le théorème 5) que la $(q,0)$-forme $\mathrm{Tr}\,[\psi]$ est holomorphe sur $D'$. $\diamondsuit$

En travaillant cette fois dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+p}(\mathbb{C})$ tout entier, nous retrouvons par le principe "G.A.G.A" ("*Géométrie Analytique-Géométrie Algébrique*") le théorème originel d'Abel.

**Corollaire 1 (Théorème d'Abel)** *Soit $V$ un sous-ensemble analytique de $\mathbb{P}^{n+p}(\mathbb{C})$ de dimension pure $n$ et soit $\psi$ une $(q,0)$-forme rationnelle ($0 \leq q \leq n$) sur $V$. Alors $\mathrm{Tr}\,[\psi]$ est aussi rationnelle sur $\mathbb{G}(p, n+p)$. Si $\psi$ est holomorphe, i.e si $\psi \in \omega_V^q$, alors la trace est identiquement nulle sur la grassmanienne $\mathbb{G}(p, n+p)$.*

**Preuve.** Puisque toute forme méromorphe (repectivement holomorphe) sur $\mathbb{G}(p, n+p)$ est nécessairement rationnelle (respectivement nulle (ou constante si q=0)) par le principe "G.A.G.A" (la grassmannienne se plonge dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ avec $N$ suffisamment grand), le corollaire suit immédiatement du théorème 6 avec $D = \mathbb{P}^{n+p}(\mathbb{C})$. $\diamondsuit$

**Exemple 1.** Donnons un exemple simple d'application. Supposons donnée

$$V = f(x, y) = 0$$

une courbe affine de degré $d$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et soit $\psi$ la forme $dy$ ($x$ et $y$ sont ici les coordonnées affines). Supposons que $V$ coupe la droite $x = 0$ transversalement en $d$ points distincts de $\mathbb{C}^2$, ce qui nous permet bien de travailler en coordonnées affines. Soit $(a, b)$ l'hyperplan $\{x = ay + b\}$ (nous décrivons ainsi un ouvert dense de la grassmanienne, ce qui nous suffit pour la décrire entièrement). Par le théorème d'Abel, nous savons que

$$\mathrm{Tr}[\psi](a, b) = P(a, b)da + Q(a, b)db$$

est une forme rationnelle et nous affirmons alors que $Q$ est en fait indépendant de $b$. En effet, l'application polynomiale $(y, b) \to f(ay + b, y)$ est de degré $d$ ; ainsi, si nous écrivons

$$f(ay + b, y) = \sum_{j=1}^{d} c_j(a, b)y^j = c_d(a, b) \prod_{k=1}^{d} (y - y_k(a, b)) \quad ,$$

nous voyons que $c_j$ est de degré au plus $d - j$ en $b$. Nous avons de plus

$$\mathrm{Tr}\,[dy](a, b) = \sum_k dy_k(a, b) = \partial_a \Big( \sum_k y_k(a, b) \Big)\, da + \partial_b \Big( \sum_k y_k(a, b) \Big)\, db\,,$$

et ainsi, comme $\sum y_k = c_{d-1}/c_d$ est de degré 1 en $b$, il suit que

$$Q(a, b) = \partial_b \Big( \sum_k y_k(a, b) \Big)$$

est indépendant de $b$ comme annoncé.

**Exemple 2.** (*À propos des lois de groupe sur les courbes elliptiques*).
Nous savons ([11] , 5.2) que tout tore complexe $\mathbb{C}/R$ associé à un réseau $R$ est biholomorphe à une courbe elliptique non singulière $C_R$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ donnée (en coordonnées homogènes $[x : y : z]$) par l'équation

$$y^2 z - 4x^3 + g_2(R)xz^2 + g_3(R)z^3 = 0,$$

(où les $g_i(R)$ sont des constantes attachées au réseau $R$), via l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{C}/R & \rightarrow & C_R \\ z+R & \rightarrow & [\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1] \text{ si } z \notin R \\ z+R & \rightarrow & [0,1,0] \quad \text{sinon} \end{array}$$

(où $\mathcal{P}$ est le polynôme de Weierstrass associé au réseau R, [11]), application dont l'inverse est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} u^{-1} : C_R & \rightarrow & \mathbb{C}/R \\ p & \rightarrow & \displaystyle\int_{[0,1,0]}^{p} y^{-1} dx \end{array}$$

Nous intégrons ici le long de tout chemin lisse dans $C_R$ joignant $[0,1,0]$ à $p$. Cette intégrale est bien définie modulo le réseau $R$ qui est alors donné par ([11], 6.2)

$$R = \left\{ \int_\gamma y^{-1} dx \,;\, \gamma \text{ chemin lisse fermé de } C_R \right\}.$$

**Remarque 10.** Le réseau $R$ est en fait engendré par les deux périodes de la courbe $\eta_i = \int_{\gamma_i} (y^{-1} dx)$, $i = 1, 2$, où les $\eta_i$ forment une base du groupe d'homologie singulière de $C_R$ (isomorphe par $\overline{\gamma} \rightarrow \overline{\gamma \circ u}$ à celui de $\mathbb{C}/R$, lui-même isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui est bien un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2).

Puisque $\mathbb{C}/R$ est un groupe abélien additif (l'addition étant celle induite par l'addition naturelle dans $\mathbb{C}$), nous pouvons nous demander si $u$ induit une structure de groupe abélien sur notre courbe. Nous pouvons en fait décrire géométriquement cette structure de groupe ([11], théorème 3.38), qui se trouve entièrement déterminée par les deux propriétés suivantes :

- l'élément neutre est le point d'inflexion $[0, 1, 0]$ ;
- la somme de trois points $p$, $q$ et $r$ vaut 0 si et seulement s'ils sont les trois points d'intersection (comptés avec multiplicité) de la courbe avec une droite projective.

Il est alors difficile de montrer géométriquement ces faits, notamment l'associativité de la loi ainsi induite. Le théorème d'Abel va nous permettre de répondre plus simplement à ces questions grâce au théorème suivant :

**Théorème 7** *Etant donnés trois points $p$, $q$ et $r$ de la courbe elliptique $C_R$, alors*

$$R + u^{-1}(p) + u^{-1}(q) + u^{-1}(r) = R + 0 \tag{$*$}$$

*si et seulement si $p$, $q$ et $r$ sont les points d'intersection de $C_R$ avec une droite de $\mathbb{P}^2$.*

**Remarque 11.** Ce théorème s'interprète comme une formule additive pour les intégrales elliptiques de la forme

$$\int_{[0,1,0]}^{p} y^{-1}dx\,,$$

sur $C_R$, formule nous donnant la loi de groupe de $C_R$ : si $r \in C_R$, nous définissons l'opposé $-r$ de $r$ comme l'unique point de $C_R$ vérifiant

$$R + u^{-1}(r) + u^{-1}([0,1,0]) + u^{-1}(-r) = R + 0\,,$$

i.e l'unique point d'intersection de la droite $(r, [0,1,0])$ et de $C_R$ ; enfin, si $p$ et $q$ sont deux points de $C_R$, le point $p+q$ est l'opposé de l'unique point $r$ vérifiant $(*)$ et notre loi de groupe est bien définie et notament associative.

**Preuve du théorème 7.** En dehors d'une hypersurface de la grassmanienne des hyperplans de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, tout hyperplan $\zeta$ coupe notre courbe (de degré 3, c'est une cubique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) en trois points $p(\zeta)$, $q(\zeta)$ et $r(\zeta)$ distincts dont les coordonnées dépendent holomorphiquement de $\zeta$. Nous remarquons alors, en notant $\eta = y^{-1}dx$ :

$$\begin{aligned} d_\zeta\Big[u^{-1}(p(\zeta)) + u^{-1}(q(\zeta)) + u^{-1}(r(\zeta))\Big] &= \eta(p(\zeta)) + \eta(q(\zeta)) + \eta(r(\zeta)) \\ &= \mathrm{Tr}\,[\eta](\zeta)\,. \end{aligned}$$

Si nous notons maintenant $\pi$ le difféomorphisme local naturel $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/R$, nous avons

$$(u \circ \pi)^*(\eta) = \frac{d[\mathcal{P}(z)]}{\mathcal{P}'(z)} = dz$$

impliquant, puisque $\pi \circ u$ est un difféomorphisme local et que $dz$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, que $\eta$ vérifie la condition *ii)* du théorème 5. Ainsi, par le corollaire 1, la trace de $\eta$ se prolonge à toute la grassmanienne en la forme identiquement nulle. Notre somme

$$u^{-1}(p(\zeta)) + u^{-1}(q(\zeta)) + u^{-1}(r(\zeta))$$

est donc constante (puisque $C_R$ est connexe comme courbe algébrique irréductible) et vaut en fait 0 puisque $u^{-1}([0,1,0]) = 0$, ce qui montre la première partie du théorème.

À l'inverse, prenons trois points $p$, $q$ et $r$ de $C_R$ vérifiant $(*)$. Notons $r'$ le troisième point d'intersection de la droite $(p, q)$ avec la courbe. Par ce que nous venons de montrer, les trois points $p$, $q$ et $r'$ vérifient $(*)$, ce qui implique

$$u^{-1}(r) = u^{-1}(r'),$$

soit $r = r'$, et achève la preuve du théorème. $\diamondsuit$

# Références


[1] M. Atiyah & MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley series in Mathematics.

[2] D. Barlet, Le faisceau $\omega_X$ sur un espace analytique $X$ de dimension pure, Séminaire F. Norguet, Springer Lecture Notes in Math. Vol. 670, 187-204, 1978.

[3] N. Coleff, M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lecture Notes in Mathematics 633, Springer 1978.

[4] A. Dickenstein, C. Sessa, Résidus de formes méromorphes et cohomologie modérée, *Géométrie complexe*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1438, Hermann, 1996.

[5] P. Griffiths, Variations on a therorem of Abel, Inventiones math. 35, 321-390, 1976.

[6] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren Math. Wiss. 265, Springer-Verlag, 1984.

[7] R. Gunning & H. Rossi, *Analytic functions of several variables*, Prentice-hall.

[8] M. Herrera, D. Lieberman, Residues and principal values on complex spaces, Math. Ann. 194, 259-294, 1971.

[9] G. Henkin & M. Passare, Abelian differentials on singular varieties and variation on a theorem of Lie-Griffiths, Inventiones math. 135, 297-328, 1999.

[10] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland.

[11] F.Kirwan, *Complete Algebraic Curves*, London Math. Soc., Student Texts 23.

[12] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris.

[13] M.P. Malliavin, *Algèbre commutative*, Masson, Paris.

[14] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Math. Ann. 133, 328-370, 1957.

[15] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag.

[16] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[17] O. Zariski & P. Samuel, *Commutative algebra*, Princeton, N.J, Van Nostrand, 1958.